ОСНОВАНІЯ

ГЕОМЕТРІИ.

РУКОВОДСТВО,

СОСТАВЛЕННОЕ ДЛЯ ГИМНАЗІЙ,

ФЕДОРОМЪ БУССЕ.

Изданіе седьмое.



МОСКВА.
ИЗДАНІЕ НАСЛѢДНИКОВЪ БРАТЬЕВЪ САЛАЕВЫХЪ.
1880.

Дозволено Цензурою. Москва, 26 Іюля 1880 года.

ТИПОГРАФІЯ И. И. СМИРНОВА, КУДРИНО, СОБ. ДОМЪ

ВВЕДЕНІЕ.

1. Разсматривая естественныя тѣла мы примѣчаемъ въ нихъ различныя свойства. Нѣкоторыя изъ послѣднихъ случайныя, другія необходимы и нераздѣльны отъ сущности тѣлъ. Въ числѣ необходимыхъ свойствъ находится и то, по которому всякое тѣло занимаетъ нѣкоторую часть пространства, и это-то свойство называется *протяженностью*, а занимаемая часть пространства—*протяженіемъ*. Какъ бы мало тѣло ни было, хотя бы оно и ускользало отъ нашихъ чувствъ, все же наполняетъ какую-нибудь, хотя и малѣйшую, часть пространства, и имѣетъ длину, ширину и вышину (которая въ нѣкоторыхъ случаяхъ называется толщиною или глубиною). Эти три измѣренія тѣлъ иногда весьма очевидны, напримѣръ въ какомъ нибудь зданіи, въ четыреугольномъ ящикѣ и т. п,; въ другихъ же тѣлахъ, какъ-то въ шарѣ, въ кускѣ необдѣланнаго камня и т. п., они неявственны.

2. Такъ какъ всѣ тѣла занимаютъ только часть пространства, то посему они должны имѣть свои границы или предѣлы, которые называются *поверхностями*. Поверхности, какъ границы тѣлъ, имѣютъ только два измѣренія: длину и ширину; и посему можно сказать, поверхность есть протяженіе, имѣющее два измѣренія, длину и ширину.

3. Предѣлы поверхностей, какъ протяженій, имѣющихъ два измѣренія, по необходимости могутъ имѣть только одно, то есть длину. Таковыя протяженія, одно только измѣреніе имѣющія, называются *линіями*. Эти послѣднія суть также протяженія конечной величины, и потому тоже имѣютъ свои границы, называемыя *точками*, которыя, какъ предѣлы протяженій одного только измѣренія, сами никакоко измѣренія, то есть, ни длины, ни ширины и толщины, имѣть не могутъ.

4. Между двумя точками можно вообразить безчисленное множество линій, различнаго вида и величины. Кратчайшая изъ нихъ называется *прямою*. И такъ *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*.

Вообразимъ теперь поверхность, на которой можно представить себѣ прямыя линіи во всякомъ направленіи, то таковая поверхность называется плоскою или *плоскостью*. Слѣд. плоскость есть протяженіе, имѣющее два измѣренія, длину и ширину, и на которомъ можно себѣ представить прямыя линіи во всякомъ направленіи.

5. Протяженія всѣхъ трехъ родовъ, то есть протяженіе въ длину, ширину и толщину, протяженіе въ длину и ширину, и протяженіе въ одну

только длину, хотя отдѣльно отъ естественныхъ тѣлъ не существуютъ, однакожъ могутъ быть предметомъ изслѣдованій. Напримѣръ, когда намѣреваемся опредѣлить высоту какого нибудь зданія или дерева, то имѣемъ въ виду одно только измѣреніе, то есть разстояніе отъ вершины до основанія; когда говоримъ о величинѣ озера, представляемъ себѣ только два измѣренія—длину и ширину, не обращая вниманія на глубину его; если же нужно узнать вмѣстимость какого-нибудь сосуда, тогда опредѣляемъ всѣ три измѣренія. Теперь не трудно понять различіе между *геометрическимъ* и *физическимъ* тѣлами. Подъ первымъ разумѣютъ одно только протяженіе, а подъ послѣднимъ совокупность всѣхъ свойствъ, составляющихъ его сущность: протяженность, непроницаемость, скважность, плотность, дѣлимость и проч.

6. Очевидно, что форма и величина тѣлъ зависитъ отъ вида и величины поверхностей, ихъ ограничивающихъ; а эти послѣднія находятся опять въ связи съ формою и величиною линій, составляющихъ ихъ предѣлы; то изъ того и слѣдуетъ, что для точнаго познанія различныхъ свойствъ тѣлъ, должно начать разсматриваніемъ линій.

7. Систематическое изложеніе истинъ, служащихъ къ изысканію свойствъ протяженій всѣхъ трехъ родовъ и ихъ измѣренію, составляетъ науку, называемую *Геометріею* (*). Самое названіе, по своему словопроизводству, показываетъ, что она ведетъ также къ измѣренію земли. Въ самомъ дѣлѣ она, какъ изъ Исторіи извѣстно, была обязана своимъ происхожденіемъ потребности опредѣлять точнѣе участки земли, но въ послѣдствіи была развита въ высшей степени и получила высшее назначеніе.

8. Для легчайшаго обозрѣнія различныхъ частей Геометріи, раздѣляютъ ее на три главныхъ отдѣла, основываясь на томъ, что и протяженія бываютъ троякаго рода. Въ первой части разсматриваются свойства линій, или протяженій, имѣющихъ одно измѣреніе, т. е. длину, и потому присвоиваютъ этой части Геометріи названіе *Лонгиметріи*; во второмъ отдѣлѣ изслѣдуются поверхности, и преимущественно плоскости, и по этой причинѣ второе отдѣленіе получило названіе *Планиметріи*; и наконецъ въ третьей части, *Стереометріи*, излагается ученіе о тѣлахъ.

9. Свойства протяженій всѣхъ родовъ познаются преимущественно чрезъ ихъ сравненіе. Сравненіе же удобнѣйшимъ образомъ производится посредствомъ наложенія одной величины на другую, и посему *наложеніе* есть одинъ изъ способовъ, употребляемыхъ для доказательства геометрическихъ истинъ. Сравнивая данныя величины, находимъ различныя ихъ отношенія, которыя могутъ быть равны и не равны; и изъ такого

(*) Слово Геометрія взято изъ Греческаго языка: *γῆ* —значитъ земля, а *μετρέω* мѣряю.

сравненія происходитъ *теорія пропорціональныхъ величинъ*, составляющая второй способъ, которымъ пользуются при изслѣдованіи протяженій всѣхъ родовъ. Но иногда случается, что сравниваемыя величины, будучи весьма разнородны, не имѣютъ общей мѣры, но имѣютъ то свойство, что однѣ изъ нихъ постоянны, а другія измѣняются и притомъ такъ, что разность между первыми и послѣдними можетъ быть сдѣлана менѣе всякой произвольно взятой величины, какъ бы мала она ни была. Въ Ариѳметикѣ и Алгебрѣ мы уже встрѣчали такія величины; наприм. обращая дробь $1/3$ въ десятичную, получаемъ $1/3 = 0,3333....$, и чѣмъ болѣе возьмемъ десятичныхъ знаковъ, тѣмъ менѣе будетъ разность между постоянною дробью $1/3$ и измѣняющеюся десятичною дробью. Если остановимся на четвертомъ знакѣ, то разность между $1/3$ и $0,3333...$ будетъ менѣе одной десятитысячной; если же прибавимъ еще два знака, то разность будетъ менѣе одной милліонной, и т. д. Изъ сего видимъ, что разность можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго произвольно-взятаго количества, какъ бы мало оно ни было. Возьмемъ еще одинъ примѣръ: пусть требуется извлечь квадратный корень изъ 2. Производя извѣстныя дѣйствія получимъ: $\sqrt{2} = 1,414...$ И здѣсь находимъ, что, чѣмъ болѣе опредѣлимъ десятичныхъ знаковъ, тѣмъ менѣе будетъ разность между $\sqrt{2}$ и найденнымъ числомъ.

Сверхъ сего замѣчаемъ, что въ 1-мъ примѣрѣ данная дробь $1/3$ остается неизмѣнною, а измѣняется дробь десятичная $0,3333....$; во второмъ же примѣрѣ $\sqrt{2}$ остается постояннымъ, а измѣняется десятичная дробь $1,414....$ по мѣрѣ опредѣленія новыхъ десятичныхъ знаковъ. Также не трудно убѣдиться въ томъ, что разность между десятичною дробью $0,3333...$ и $1/3$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины, и что десятичная дробь увеличивается, съ прибавленіемъ новыхъ знаковъ, но никогда не можемъ достигнуть дроби $1/3$. По этой причинѣ $0,3333....$ называется *перемѣнною* величиною, а $1/3$ ея *предѣломъ*. Въ такомъ же отношеніи находится и $\sqrt{2}$ къ $1,414...$; посему $\sqrt{2}$ есть предѣлъ перемѣнно величины $1,414....$

Подобныя величины встрѣчаемъ и въ Геометріи; и изъ ихъ изслѣдованія выводятся нѣкоторыя важныя геометрическія предложенія, на которыхъ основанъ третій способъ доказательствъ, названный *способомъ предѣловъ*.

Основныя истины, которыя притомъ столь очевидны, что не требуютъ доказательства, называются *аксіомами*.

Приведемъ здѣсь главнѣйшія изъ нихъ:

I. Цѣлое болѣе своей части.

II. Всѣ части одного цѣлаго, вмѣстѣ взятыя составляютъ цѣлое.

III. Величина, которая ни больше, ни меньше другой, должна быть ей

равна; величина, которая ни равна и ни больше другой, должна быть меньше; и наконецъ величина, которая ни равна и ни меньше другой, должна быть больше.

IV. Если къ равнымъ величинамъ придадутся равныя, то составятся равныя суммы.

V. Если отъ равныхъ величинъ отнимемъ равныя величины, то получимъ равныя разности.

VI. Двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собою.

VII. Если равныя величины увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковое число разъ, то получимъ равныя величины.

VIII. Если къ одной и той же или къ двумъ равнымъ величинамъ приложатся неравныя, то и суммы ихъ не равны, и та изъ суммъ будетъ больше, которая происходитъ отъ прибавленія большей величины.

IX. Если отъ одной и той же или двухъ разныхъ величинъ отнимутся неравныя величины, то и остатки будутъ неравны; и тотъ остатокъ будетъ большій, который получается по отнятіи меньшей величины.

10. Истины, излагаемыя въ Геометріи, или столь очевидны, что не требуютъ никакого доказательства, и тогда онѣ называются, какъ выше уже было замѣчено, *аксіомами*, или онѣ не основаны непосредственно на воззрѣніи, и суть результаты различныхъ соображеній, и посему должны быть доказаны; таковыя истины называются *теоремами*. Онѣ состоятъ изъ двухъ частей: въ одной предлагается доказываемая истина, а въ другой условія, при коихъ она имѣетъ мѣсто. Напримѣръ: *треугольники равны*, если три стороны одного порознь равны тремъ сторонамъ другаго.

Иногда цѣлью изслѣдованія бываетъ не выводъ свойствъ геометрическихъ протяженій, а рѣшеніе частныхъ вопросовъ, съ помощью особенныхъ построеній, согласно съ прежде доказанными теоремами; напримѣръ *раздѣлить прямую линію на двѣ, или три равныя части* и т. п.; то въ такомъ случаѣ предложеніе, выражающее таковое требованіе, называется *задачею*.

Теоремы и задачи должны быть расположены въ систематическомъ порядкѣ; онѣ должны находиться въ тѣсной, такъ сказать, неразрывной связи. Однакожъ, иногда нужно бываетъ ввести предложеніе, которое не проистекаетъ непосредственно изъ предъидущаго, и какъ бы прерываетъ связь между теоремами. Таковое предложеніе, необходимое для легчайшаго уразумѣнія послѣдующей теоремы, или для удобнѣйшаго рѣшенія заданнаго вопроса, носитъ нозваніе *леммы*.

ОТДѢЛЕНІЕ I.

О ЛИНІЯХЪ И ПЛОСКОСТЯХЪ.

Глава 1.

О ЛИНІЯХЪ, ПРЯМОЛИНЕЙНЫХЪ УГЛАХЪ И ФИГУРАХЪ.

I. О линіяхъ.

11. Линія, какъ всякая другая величина, можетъ быть раздѣлена, на произвольное число частей. Концы каждой части раздѣленной линіи суть точки (§ 3); и такъ можно себѣ представить на линіи безчисленное множество точекъ, которыя тѣмъ ближе одна къ другой, чѣмъ на большее число частей раздѣлена линія. Если себѣ вообразимъ вмѣсто происшедшихъ точекъ что одна и та же точка находилась въ различныхъ мгновеніяхъ въ тѣхъ мѣстахъ, то въ такомъ случаѣ сдѣлается происхожденіе линіи, чрезъ безпрерывное движеніе точки, нагляднымъ. Направленія, по коимъ мы можемъ себѣ представить движеніе точки, весьма различны; и посему можно себѣ вообразить безчисленное множество различныхъ линій между двумя точками. Самая кратчайшая изъ нихъ называется *прямою линіею* или *прямою*, и по этой причинѣ между двумя данными точками можно провести только одну прямую линію.

12. Для означенія точки ставятъ букву подлѣ нея; прямая же линія означается двумя буквами, поставленными при ея концахъ. Такъ напримѣръ прямая, находящаяся между точками A и B (см. черт. 1) означается буквами A B.

13. Изъ опредѣленія прямой слѣдуетъ:

I. Двумя точками совершенно опредѣляется положеніе прямой линіи.

II. Если двѣ прямыя имѣютъ двѣ общія точки, то части ихъ, лежащія между этими точками, совпадаютъ. Положимъ (черт. 2), что меньшая линія AB наложена на большую CD такъ, что точка A упала въ C, а точка B въ E; то прямая AB совершенно совмѣстится съ частію CE прямой CD, потому что въ противномъ случаѣ между C и E находились бы двѣ различныя прямыя AB и CE, что не согласно съ опредѣленіемъ прямой.

III. Подобнымъ образомъ можно удостовѣриться, что двѣ прямыя совпадаютъ, если только двѣ точки одной совпадаютъ съ двумя точками другой. Выше уже объяснено, что если точка A (черт. 2) упадетъ въ C,

а B въ E, то прямыя AB и CE совмѣстятся. Но какъ точка B взята на произвольномъ разстояніи отъ A; то изъ того слѣдуетъ, что то же самое и такимъ же способомъ можетъ быть выведено и для всякой другой точки M. Изъ этого же и слѣдуетъ, что всѣ точки одной прямой совмѣщаются съ точками другой, если онѣ имѣютъ только двѣ общія точки.

IV. Такъ какъ подъ линіею вообще подразумѣвается неопредѣленное протяженіе въ одну только длину, то изъ того можно заключить, что всякая несомкнутая линія, а посему и прямая, можетъ быть въ обѣ стороны продолжаема безпредѣльно, такъ что ее можно сдѣлать длиннѣе всякой данной линіи.

14. Нѣсколько прямыхъ, соединенныхъ между собою, и не составляющихъ одной прямой, образуютъ *ломанную линію.* Такъ напримѣръ прямыя AB, BC, CD, DE (черт. 3) образуютъ ABCDE.

15. Разсмотрѣвъ главныя свойства прямыхъ, скажемъ нѣсколько словъ объ ихъ измѣреніи. Измѣрить прямую значитъ: найти, сколько разъ въ ней содержится другая прямая, принимаемая за единицу; напримѣръ измѣрить разстояніе между предметами значитъ: опредѣлить сколько разъ въ этомъ разстояніи содержится аршинъ, или футъ, или какая нибудь другая линейная мѣра. Чтобъ найти, сколько разъ единица линейной мѣры содержится въ данной прямой, должно ее отлагать на прямой столько разъ, сколько возможно; и если случается остатокъ, то слѣдуетъ опредѣлить, какую часть принятой единицы составляетъ полученный остатокъ. Изъ этого происходитъ слѣдующая задача.

Задача: *найти общую мѣру данныхъ двухъ прямыхъ, или опредѣлить ихъ отношеніе.*

Пусть будутъ (черт. 4) AB и CD данныя прямыя. Отлагая на большей линіи AB меньшую CD, сколько разъ возможно, найдемъ, что отъ A до I она можетъ быть отложена 4 раза, и сверхъ сего остается еще IB; и такъ

$$AB = 4\ CD + IB.\ (1)$$

Отлагая остатокъ IB на CD, находимъ, что въ ней ID заключается 3 раза, и еще остается KD; слѣд.

$$CD = 3\ IB + KD.\ (2)$$

Отлагая второй остатокъ на первомъ, положимъ, что

$$IB = 2\ KD\ (3)$$

Изъ уравненія (2) $CD = 3\ IB + KD$ выведемъ, подставляя равныя величины вмѣсто равныхъ:

$$CD = 3 \times 2\ KD + KD = 7\ KD.$$

А изъ уравненія (1) $AB = 4 \times 7\ KD + 2KD = 30\ KD.$

Изъ этихъ выкладокъ слѣдуетъ, что прямая KC заключается цѣлое число разъ въ обѣихъ данныхъ прямыхъ, и посему она будетъ искомою

общею мѣрою. Изъ самаго же рѣшенія задачи видно, что отъискиваніе общей мѣры двухъ прямыхъ совершенно сходно съ отъискиваніемъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ.

16. Примѣчаніе. Мы здѣсь положили, что второй остатокъ заключается въ первомъ цѣлое число разъ; но можетъ быть, что и при третьемъ откладываніи получается остатокъ, и при четвертомъ и т. д. Въ такомъ случаѣ общей мѣры данныхъ двухъ прямыхъ опредѣлить нельзя, а посему и точнаго отношенія между ними найти не можно. Въ первомъ случаѣ прямыя называются *соизмѣримыми*, а во второмъ *несоизмѣримыми.*

17. Въ § 11 было сказано, что между двумя точками можно провести одну прямую, но безчисленное множество другихъ линій. Между точками (черт. 5) A и B можно представить себѣ только одну прямую AB, безчисленное множество ломанныхъ, и безчисленное множество другаго рода линій, которыхъ части не суть прямыя линіи. Послѣдняго рода линіи называются *кривыми*, которыя означаются по крайней мѣрѣ тремя буквами, изъ коихъ крайнія двѣ также поставляются подлѣ конечныхъ точекъ линіи. И такъ между точками A и B находимъ одну прямую AB, двѣ ломанныхъ ACDEB, AIB, и двѣ кривыхъ AGB и AHB.

18. Очевидно, что кривыя могутъ быть весьма различны, по своему виду и свойствамъ. Изъ нихъ въ первоначальной Геометріи разсматривается только правильнѣйшая, называемая *круговою.* Эта кривая имѣетъ то свойство, что внутри ея находится точка, равноотстоящая отъ всѣхъ точекъ кривой. Эта точка (черт. 6) C называется *средоточіемъ* или *центромъ*; разстояніе CA, CB отъ центра до точекъ круговой линіи *полупоперечниками* или *радіусами*, а часть плоскости, находящейся внутри кривой линіи, *кругомъ.* Часть круговой линіи AnE называется *дугою*, а прямая AE, соединяющая конечныя точки, *хордою.*

19. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для опредѣленія точекъ, находящихся въ равныхъ разстояніяхъ, напримѣръ=CA (фиг. 6) отъ данной точки C, стоитъ только изъ C описать круговую линію, радіусъ которой былъ бы равенъ данной прямой CA. Всѣ точки начерченной круговой будутъ въ требуемомъ разстояніи отъ точки C.

Линія, состоящая изъ кривыхъ и прямыхъ, называется *смѣшанною*, напримѣръ линія ABCDEFG (Фиг. 7).

II. О прямолинейныхъ углахъ.

20. На плоскости можно провести двѣ прямыя такъ, что онѣ по достаточномъ продолженіи встрѣтятся. Прямыя встрѣчаются въ одной точкѣ, потому что если бы онѣ (§ 13. II) имѣли двѣ или болѣе общихъ точекъ,

то онѣ слились бы въ одну прямую. Эта точка C (черт. 8) называется *точкою встрѣчи* или *точкою пересѣченія* (фиг. 9), смотря потому, оканчиваются ли прямыя въ точкѣ встрѣчи, или продолжены на другую сторону.

21. Двѣ прямыя (черт. 8), выходящія изъ одной общей точки C, заключають между собою часть плоскости, на которой онѣ проведены. Такъ какъ прямыя могутъ быть продолжены неопредѣленно, то и часть плоскости, между ними находящаяся, неопредѣленна, и величина ея зависитъ отъ большей или меньшей взаимной наклонности прямыхъ. Эта неопредѣленная часть плоскости, заключающаяся между прямыми, называется *угломъ*, прямыя BC и AC его *сторонами* или *боками*, а точка C, въ которой встрѣчаются стороны, его *вершиною*. Означаютъ углы одною буквою, поставленною подлѣ вершины или, если нѣсколько угловъ имѣютъ общую вершину, какъ въ черт. 9, тремя буквами, изъ коихъ средняя поставлена у вершины угла, а крайнія у конечныхъ точекъ сторонъ. Посему уголъ, по лѣвую сторону находящійся, означается буквами ACE.

22. Положеніе прямой не зависитъ отъ ея величины, а потому и величина угла, зависящая отъ большаго или меньшаго наклоненія его сторонъ, не зависитъ отъ ихъ величины.

23. Точно такъ для сравненія прямыхъ, меньшую откладываютъ на большей, поступаютъ и при сравненіи угловъ. Пусть будутъ данные углы (черт. 10) ACB и D′C′B′. Представимъ себѣ, что уголъ ACB положенъ на уголъ D′C′B′ такъ, чтобы вершины C и C′ совпадали и сторона CB упала на сторону C′B′; если предположимъ, что CA упадетъ по направленію C′A′, то въ такомъ случаѣ заключаемъ, что неопредѣленное пространство ACB менѣе неопредѣленнаго пространства D′C′B′, или что уголъ ACB<угла D′C′B′. Если же при наложеніи двухъ угловъ совпадаютъ не только ихъ вершины, но и стороны одного со сторонами другаго, то таковые углы равны; напримѣръ углы ACB и A′C′B′ (черт. 10). Для означенія угловъ употребляется знакъ: $\angle$.

24. Представимъ себѣ, что прямая DC (черт. 11) встрѣчается съ прямою AB, такъ что углы ACD и DCB равны между собою, то таковые углы называются *прямыми* (*); прямая же DC, составляющая съ AB по обѣ стороны прямые углы, *перпендикулярною* къ AB.

(*) Хотя можно принять очевиднымъ, что всѣ прямые углы равны между собою, однакожъ для большой геометрической строгости здѣсь прилагается доказательство этому предложенію. Пусть (черт. 12) BC перпендикулярна къ AD, а HF перпендикулярна къ EG; слѣд. $\angle ACB = \angle DCB$, а $\angle EFH = \angle GFH$; надобно доказать, что и $\angle ACB = \angle EFH$. Для сего представимъ себѣ, что FG положена на AD такъ, чтобы точка F упала въ C; въ такомъ случаѣ и EF совмѣстится съ CA, а FG съ CD. Положимъ, что при семъ FH не упадетъ на CB, а по направленію CI; тогда уголъ EFH былъ бы равенъ углу ACI, а уголъ GFH углу DCI. Но по условію.

25. Положимъ, что (чер. 13) уголъ DCB прямой, и сравнимъ съ нимъ каждый изъ остальныхъ двухъ того же чертежа. Пусть при наложеніи сторонъ EF и HK на сторону CB, такъ чтобы вершины угловъ совпадали, сторона EA упадетъ внутри прямаго угла, а сторона HG внѣ, то въ такомъ случаѣ уголъ AEF менѣе прямаго, а уголъ GHK болѣе. Углы, которые менѣе прямаго, называются *острыми*, а которые болѣе прямаго *тупыми*.

26. Если прямая BD (черт. 15) встрѣчается съ другою прямою BC въ точкѣ B, то образуетъ два угла ABD и DBC, имѣющіе одинъ бокъ общій, остальные же два бока составляютъ одну прямую. Таковые углы называются *смежными*. Если они равны, то каждый изъ нихъ есть прямой; слѣд. сумма ихъ равна двумъ прямымъ. Если же они не равны, то одинъ изъ нихъ тѣмъ болѣе прямаго, чѣмъ другой менѣе. Въ этомъ легко увѣриться, если вообразимъ въ точкѣ B прямую BE, перпендикулярную къ AC. Изъ чертежа очевидно, означивъ буквою d прямой уголъ, что

$$\angle ABC = d + \angle FBD$$
$$\angle DBC = d + \angle FBD$$

сложивъ, получимъ $\angle ABD + \angle DBC = 2d$, т. е.
сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.

27. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *если сумма двухъ угловъ равна двумъ прямымъ, и если у нихъ вершина и одинъ бокъ общіе, то остальные два бока должны составить одну прямую.*

Пусть (черт. 16) $\angle ACB + \angle BCD = 2d$, и BC ихъ общая сторона. Если CD не есть продолженіе стороны AC, то AC можно продолжить, и пусть CF будетъ продолженіе

$$\angle ACB + \angle ACF = 2d \text{ (§ 26)}$$

но $\angle ACB + \angle BCD = 2d$ по условію,

слѣд. $\angle ACB + \angle BCF = \angle ACB + \angle BCD$ (§ 8. VI)

изъ сего слѣд., что $\angle BCF = \angle BCD$ (§ 8, V), т. е. цѣлое равно своей части,—слѣдствіе нелѣпое, которое всегда будетъ имѣть мѣсто пока полагается, что CD не есть продолженіе прямой AC. Изъ этого

$$\angle EFH = \angle GFH$$

слѣд. и $\angle ACI = \angle DCI$ (1)

Съ другой стороны изъ самаго чертежа видно, что

$$\angle ACI > \angle ACB, \text{ а } \angle BCD > \angle ICD,$$

а по условію $\angle ACB = \angle BCD$

слѣд. $\angle ACI > \angle ICD$ (2)

Уравненіе (1) и (2) явно противорѣчатъ другъ другу; и это противорѣчіе всегда будетъ происходить, когда будемъ полагать, что при наложеніи прямая FH падаетъ не на BC, а по какому нибудь другому направленію. Слѣд. FH должна упасть на BC, и тогда $\angle EFH = \angle ACB$, $\angle HFG = \angle BDC$, то есть, всѣ прямые углы равны.

и явствуетъ, что AC и CD должны составлять одну прямую, потому что только въ этомъ случаѣ не будетъ никакого противорѣчія.

Представимъ теперь себѣ (черт. 18) нѣсколько прямыхъ CB, EB, FB, GB, встрѣчающихся всѣ въ одной точкѣ B прямой AD, то составится рядъ прилежащихъ угловъ по одну сторону прямой AD, коихъ крайніе бока составляютъ данную прямую. (Для удобности означимъ углы малыми буквами a, b, c..., поставленными внутри угловъ у самой вершины). Очевидно, что и сумма этихъ прилежащихъ угловъ равна двумъ прямымъ, потому что они составляютъ два смежныхъ угла.

$$\angle a + \angle b = \angle ABE$$
$$\angle c + \partial + \angle e = \angle EBD$$

сложивъ получ. $\angle a + \angle b + \angle c + \angle \partial + \angle e = \angle ABE + \angle\ EBD$;

но $\angle ABE + \angle EBD = 2d$

слѣд. $\angle a + \angle b + \angle c + \angle \partial + \angle e = 2d$

то есть *сумма угловъ, по одну сторону прямой лежащихъ, равна двумъ прямымъ.*

29. Такъ какъ сумма угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой, равна двумъ прямымъ; то изъ сего слѣдуетъ, что сумма всѣхъ угловъ, лежащихъ по обѣ стороны прямой, или вокругъ одной точки, равна четыремъ прямымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ (черт. 18) данные углы a, b, c, ∂, e, Изъ нихъ

$$\angle a + \angle b + \angle c = 2d \ (\S\ 26)$$
$$\angle \partial + \angle e = 2d \ (\S\ 26)$$

слѣд. $\angle a + \angle b + \angle c + \angle \partial + \angle e = 4d$

Другой случай. Пусть будутъ данные углы (черт. 19) a, b, c, ∂, лежащіе вокругъ точки C. Чтобы привести этотъ случай къ первому, продолжимъ которую нибудь изъ данныхъ сторонъ AC. Продолженіемъ CF раздѣлится уголъ DCE на два угла n и m. Изъ § 28 слѣдуетъ:

$$\angle a + \angle b + \angle n = 2d$$
$$\angle \partial + \angle m = 2d \ (\S\ 26)$$

слѣд. $\angle a + \angle b + \angle n + \angle \partial + \angle m = 4d$

поставимъ же вмѣсто $\angle n + \angle m$ равный имъ $\angle c$, получимъ:

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle \partial = 4d,$$

что и вывести надлежало.

30. Если (черт. 20) прямую BC, встрѣчающую прямую AD въ точкѣ C, продолжимъ по другую сторону, то подъ линіею образуется еще два угла d и c. Стороны угла d суть продолженія сторонъ угла b, а стороны угла c суть продолженія сторонъ угла a. Таковые углы ∂ и b, c и a,

называются *противоположными при вершинѣ.* Такъ какъ стороны угла ∂ суть только продолженія сторонъ угла b, то изъ этого можно заключить, что наклоненіе боковъ обоихъ угловъ одно и тоже, и что по сему углы равны. Впрочемъ въ этомъ можно совершенно увѣриться слѣдующимъ образомъ:

$$\angle \partial + \angle a = 2d \ (\S\ 26)$$
$$\angle b + \angle a = 2d \ (\S\ 26)$$

Такъ какъ къ $\angle \partial$ и $\angle b$ прибавляется одна и та же величина, и получается одна и та же сумма, то необходимо $\angle d = \angle b$, то есть *углы противоположные равны между собою.*

III. О мѣрѣ угловъ.

31. Чтобы измѣрить уголъ, надобно поступить точно такъ какъ при измѣреніи прямыхъ линій, то есть сравнить его съ единицею того же рода, слѣд. съ угломъ, который принимается за единицу. Намъ уже извѣстно, что всѣ прямые углы равны; посему прямой уголъ есть величина неизмѣняющаяся или постоянная; именно по сему свойству есть самая естественная угловая единица. Если данный уголъ равняется половинѣ прямаго угла, или двумъ пятымъ прямаго, то въ такомъ случаѣ можемъ составить о данномъ углѣ весьма точное понятіе. И такъ все затрудненіе состоитъ въ томъ, чтобъ узнать способъ, какъ данные углы, острые или тупые, сравнивать съ прямымъ и находить существующее между ними отношеніе.

32. Пусть углы ABC и DEF (черт. 21) равны: въ такомъ случаѣ уголъ DEF можетъ быть наложенъ на уголъ ABC такъ, чтобъ E совпадала съ B, EF съ BC, ED съ AB. Возьмемъ на AB произвольную точку n, и опишемъ дугу nm, принявъ En за радіусъ; потомъ опишемъ и въ углѣ DEF дугу pq, которой радіусъ Ep или Eq равнялся бы Bn. При такихъ условіяхъ дуга pq должна совершенно совмѣститься съ дугою nm, потому что крайнія точки первой дуги совпадаютъ съ крайними точками второй; между ними же лежащія точки также совмѣстятся, потому что онѣ должны находиться въ равномъ разстояніи отъ центра E (§ 18). Изъ всего сказаннаго можно вывести, что *если изъ вершинъ двухъ равныхъ угловъ опишутся равными радіусами дуги между сторонами угловъ, то таковыя дуги равны.*

33. Пусть будетъ теперь на оборотъ (черт. 21) дуги nm и pq, описанныя изъ вершинъ угловъ равными радіусами, равны. Спрашивается: равны ли въ такомъ случаѣ углы Б и E. Наложимъ уголъ DEF на уголъ ABC такъ, чтобы E упала въ B, и Eq на Bm, то и дуга pq должна упасть на mn; въ противномъ случаѣ точки этихъ дугъ не находились

бы въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра, что должно быть по причинѣ равенства радіусовъ. Если же дуга pq упадаетъ на mn, то по равенству ихъ онѣ взаимно себя закроютъ и слѣд. точка p упадетъ въ точку n; а изъ этого совпаденія будетъ слѣдовать совмѣщеніе прямыхъ pE и nB. Если pE совпадаетъ съ nB, то и уголъ pEq, или что все одно, уголъ DEF совпадаетъ съ угломъ nBm или ABC, то есть $\angle$DEF$=\angle$ABC. И такъ, *если изъ вершинъ двухъ угловъ опишутся равными радіусами дуги и описанныя дуги равны, то и данные углы равны.*

34. Основываясь на предъидущихъ двухъ параграфахъ, легко рѣшить слѣдующую задачу: *На данной прямой, при данной точкѣ, начертить уголъ равный данному*; наприм. на данной прямой BC (черт. 21) начертить уголъ, равный данному углу DEF. Для сего опишемъ сперва между сторонами даннаго угла DEF, принявъ произвольную линію Eq за радіусъ, дугу pq; потомъ изъ данной точки B, данной прямой BC, опишемъ произвольную дугу mo, принявъ радіусомъ ту же линію, и отложивъ на ней отъ точки m дугу nm, равную дугѣ pq, соединимъ точки n и B прямою Bn. Такимъ образомъ составленный уголъ nBm будетъ равенъ данному, потому что (§ 33) дуги, описанныя равными радіусами между сторонами угловъ ABC и DEF, равны.

35. Зная способъ чертить углы, равные даннымъ, легко можно рѣшить задачу, о которой было упомянуто въ § 31, то есть *найти отношеніе между двумя углами* (черт. 22) ACB и DEF. Опишемъ изъ вершинъ угловъ C и E, какъ изъ центровъ, равными радіусами дуги AB и DE, и найдемъ общую мѣру этихъ дугъ, точно такъ какъ находили мѣру двухъ прямыхъ (§ 15), то есть меньшую дугу отложимъ на большей, потомъ оставшуюся часть большей дуги на меньшей, второй остатокъ на первомъ, и т. д. Пусть дуга Bm будетъ найденная общая мѣра, и пусть она содержится въ AB 4 раза, а въ дугѣ DF 7 разъ. Если изъ точекъ дѣленія m, r, p, q, r, s, и т. д. проведемъ прямыя въ точки C и E, тогда первый уголъ раздѣлится на 4 угла, а второй на 7 угловъ, которые (§ 33) всѣ равны между собою, потому что дуги Bm, mn, np, pA.... Fq, qr, rs.... равны, а изъ этого слѣдуетъ что:

$$ACB : DEF = 4 : 7$$

$$\smile AB : \smile DE = 4 : 7$$

слѣд.

$$ACB : DEF = \smile AB : \smile DF;$$

то есть *углы относятся между собою такъ какъ дуги, содержащіяся между сторонами угловъ и описанныя однимъ и тѣмъ же радіусомъ.*

36. Въ § 35 мы полагали, что данныя двѣ дуги имѣютъ общую мѣру, то есть, что при откладываніи остатковъ мы наконецъ доходимъ до такого остатка, который въ предшествовавшемъ остаткѣ заключается цѣлое число разъ: но это не всегда бываетъ, какъ при отыскиваніи отношенія

между прямыми, и въ такомъ случаѣ дуги также называются *несоизмѣримыми.*

37. Но углы всегда относятся такъ какъ дуги, хотя онѣ и несоизмѣримы, если только описаны одинакимъ радіусомъ. Въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ, основываясь на первомъ случаѣ. Пусть будетъ (черт. 23) данные углы ABC и DEF, и пусть утверждаютъ, что $\angle$ ABC относится къ $\angle$ DEF, не такъ какъ $\smile$ AC къ $\smile$ DF, но какъ $\smile$ AC къ дугѣ меньшей нежели DF, напримѣръ FG, то есть,

$$\angle ABC : \angle DEF = \smile AC : \smile GF \quad (1)$$

Чтобы опровергнуть это предположеніе, примемъ, что дуга AC раздѣлена на столь мелкія части, что каждая изъ нихъ менѣе дуги DF, въ такомъ случаѣ, если такія малыя дуги будемъ отлагать на дугѣ FD, начиная отъ конечной точки F, то непремѣнно упадетъ по крайней мѣрѣ одна точка дѣленія между D и G. Пусть будетъ H таковая точка, и тогда дуга HF будетъ соизмѣрима съ дугою AC; и слѣд. по соединеніи точки H съ E прямою HE будемъ имѣть (§ 36):

$$\angle ABC : \angle HEF = \smile AC : \smile HE \quad (2).$$

Сравнивъ пропорціи (1) и (2) находимъ, что въ нихъ предъидущіе члены равны; слѣд. изъ послѣдующихъ можно бъ было составить пропорцію

$$\angle DEF : \angle HEF = \smile GF : \smile HE.$$

Изъ чертежа явствуетъ, что въ первомъ отношеніи предъидущій членъ болѣе своего послѣдующаго, а во второмъ менѣе; слѣд. таковая пропорція не можетъ имѣть мѣста. Она-же есть слѣдствіе первыхъ двухъ; но какъ справедливость второй основана на доказанныхъ предложеніяхъ, то погрѣшность заключается въ первой. И такъ ее допустить не можно. Такое же несообразное слѣдствіе получилось бы, еслибъ положили въ пропорціи (1), что четвертый членъ болѣе дуги DE. Изъ этого же надобно заключить, что четвертый членъ долженъ быть равенъ$\smile$DE, такъ какъ нельзя допустить, что онъ болѣе или менѣе$\smile$DF.

38. Основываясь на равенствѣ отношеній угловъ и дугъ, доказанномъ для всѣхъ случаевъ, замѣняютъ первое отношеніе вторымъ, такъ какъ отношеніе между дугами удобнѣе опредѣляется. Объяснимъ примѣромъ. Пусть будетъ данный уголъ (черт. 24) ACB, и требуется найти отношеніе его къ прямому углу. Представимъ себѣ, что изъ вершины C къ сторонѣ CB возставленъ перпендикуляръ CD, для образованія прямаго угла DCB, съ которымъ требуется сравнить данный уголъ ACB. Опишемъ изъ C, какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ дугу BAD, то по § 37.

$$\angle ABC : \angle DCB = \smile AB : \smile DB \ (a)$$

Какъ отъискивая отношеніе между дугами AB и DB, выше уже показано (§ 35). Положимъ, что

$$\smile AB : \smile DB = 4 : 5$$

то и

$$\angle ACB : \angle DCB = 4 : 5.$$

39. Продолжимъ дугу DB, пока не составится цѣльная круговая линія или окружность. и стороны прямаго угла DCB до F и G. Такъ какъ DC перпендикулярна къ CB, то всѣ углы около точки C, DCB, DCG, DCF, FCG прямые, и посему всѣ равны(есле же углы равны, то и дуги DB, BG, CF, FD (§ 32) равны между собою. Всѣ онѣ, вмѣстѣ взятыя составляютъ цѣлую окружность, слѣд. каждая изъ нихъ равна четверти.

Такъ какъ прямой уголъ принимается за единицу угловой мѣры, такимъ же образомъ и соотвѣтствующая ему дуга, четверть окружности, какъ неизмѣняющая величина, принимается за единицу при измѣреніи дугъ.

Возвратимся къ пропорціи (*a*) въ § 38. Изъ нея выводимъ;

$$\frac{\angle ACB}{\angle DCB} = \frac{\smile AB}{\smile DB}$$

то есть, чтобъ найти, сколько разъ единица угловой мѣры заключается въ данномъ углѣ ACB, слѣдуетъ опредѣлить, сколько разъ въ соотвѣтствующей $\smile$ AB заключается единица дугъ. Для большей удобности въ выраженіи, единицы обоихъ родовъ подразумѣваютъ, и тогда получаютъ:

$$\angle ACB = \smile AB$$

то есть, что *уголъ* ACB *равенъ, или измѣряется дугою* AB, *заключающейся между его боками, и описанною изъ его вершины произвольнымъ радіусомъ.*

40. Большею частію вся окружность дѣлится на 360 равныхъ частей, называемыхъ *градусами*; посему въ четверти окружности 90 градусовъ. А какъ прямой уголъ измѣряется четвертью окружности, то и въ немъ 99 градусовъ. Каждый градусъ дѣлятъ на 60 минутъ, а минуту на 60 секундъ. Для краткости и удобности приняты слѣдующіе знаки: (^{0}) для означенія градуса, (′) минуты, (″) секунды. И такъ величина дуги, въ коей 48 градусовъ, 20 минутъ, и 5 сек. означается слѣдующимъ образомъ: $40^0 20' 5''$.

Нѣкоторые новѣйшіе авторы (въ особенности французскіе) принимаютъ другое раздѣленіе, желая ввести больше единства въ мѣрахъ. Они полагаютъ въ четверти окружности 100 градусовъ, въ градусѣ 100 минутъ, въ минутѣ 100 секундъ.

41. Для измѣренія угловъ на бумагѣ употребляется особенный инструментъ, называемый *транспортиръ*. Онъ состоитъ изъ мѣднаго полукруга, коего дуга раздѣлена на 180 частей, если хотятъ измѣрить уголъ, то приставляютъ транспортиръ къ данному углу такъ, чтобы его вершина совпадала съ центромъ полукруга, и одна сторона лежала на діаметрѣ. Число градусовъ, лежащихъ на дугѣ между другою стороною и діаметромъ, покажетъ величину угла.

IV. О перпендикулярныхъ и наклонныхъ прямыхъ линіяхъ.

42. Уже было объяснено, что углы, составляемые прямою, встрѣчающеюся съ другою въ точкѣ, могутъ быть равны и не равны. Въ первомъ случаѣ одна къ другой перпендикулярна, а во второмъ наклонна. Разсмотримъ свойства этихъ прямыхъ.

Такъ какъ перпендикулярная BC (черт. 12) должна составлять съ прямою AD по обѣ стороны равные углы, то изъ этаго можно заключить, что *изъ точки* C *взятой на прямой* AD *можно къ ней возставить только одинъ перпендикуляръ* CB.

Положимъ, что сверхъ CB, и CI перпендикулярна къ AD, то изъ этихъ условій слѣдовало бы, что

$$\angle ACB = \angle BCD$$

и

$$\angle ACI = \angle ICD;$$

но второе равенство при первомъ не можетъ быть допущено, потому что $\angle ACI$ болѣе $\angle ACB$, а $\angle ICD$ менѣе $\angle BCD$; а посему предположеніе, что сверхъ CB и CI перпендикулярна къ AD, не можетъ имѣть мѣста.

43 Предложеніе остается справедливымъ, когда возьмемъ точку внѣ прямой, то есть *изъ точки* C (черт. 14) *взятой внѣ прямой* AF, *можно опустить только одинъ перпендикуляръ на данную* AF.

Пусть утверждается, что можно опустить на AF еще перпендикуляръ CE. Чтобъ опровергнуть это предложеніе, продолжимъ CD, и сдѣлаемъ продолженіе DH=CD; потомъ соединимъ точки E и H прямою EH. Представимъ теперь себѣ, что верхняя часть всего чертежа, надъ прямою AF, проложена на нижнюю, притомъ такъ, что DE остается на своемъ мѣстѣ, то DC упадаетъ на DH, потому что $\angle CDE$ равенъ смежному своему углу EDH, и по равенству CD закроетъ совершенно DH, то есть C упадетъ въ H. Изъ этого же слѣдуетъ, что CE находилась бы между однѣми и тѣми же точками съ прямою EH, и по сему же съ нею совмѣстилась. И такъ, если $\angle CED$ по условію прямой, то и $\angle DEH$ былъ бы прямой, и по сему $\angle CFD + \angle DEH$ были бы равны двумъ прямымъ. Изъ этаго же слѣдовало бы (§ 27), что CE и EH составили бы одну прямую, и посему между двумя точками C и H мы бы имѣли двѣ различныя прямыя, что противно опредѣленію прямой, а посему и сдѣланное предложеніе невозможно.

44. *Если изъ точки* C (черт. 14), *взятой внѣ прямой* AF *проведутся къ ней перпендикулярная* CD *и наклонная* CE, *то первая короче второй*. Сдѣлавъ такое же построеніе какъ въ предъидущемъ §, будемъ имѣть CD=DH, CE=EH, и посему CH=2 CD, а ломанная CEH=2 CE; но

$$CH < CEH$$

потому что прямая менѣе ломанной, проведенной между тѣми же точками; слѣд. и

$$\frac{CH}{2} < \frac{CEH}{2}$$

или

$$CD < CE.$$

Такъ какъ перпендикуляръ короче всякой другой линіи, которую можн провести между данною точкою и прямою, то и принимается за мѣр разстоянія между ними.

45. *Если же изъ точки* A (черт. 25) *проведутся нѣсколько наклонныхъ къ прямой* FD, *то* I) *наклонныя* AF *и* AC, *равно удаляющіяся отъ основанія перпендикуляра, равны*; II) *изъ двухъ неравныхъ наклонныхъ болѣе удаляющаяся отъ основанія перпендикуляра* AI *длиннѣе другой менѣе удаляющейся* AC.

I. Чтобы доказать равенство прямыхъ AC и AF, наложимъ уголъ AB(на уголъ ABF, такъ чтобы AB осталась на своемъ мѣстѣ, то по равенству угловъ, BC упадаетъ на BF и по равенству прямыхъ BC и BF точка C упадетъ въ F; а изъ этого будетъ явствовать, что AC=AF, по тому что всѣ прямыя, между A и F лежащія, совмѣщаются.

II. Чтобы доказать вторую часть предложенія продолжимъ прямую AI и сдѣлавъ BE=AB, соединимъ точку E съ C и D прямыми EC и EI Легко доказать, какъ въ § 44, чрезъ наложеніе, что AC=CE, AD=DI слѣд.

ломан. ADE=2AD,
ломан. ACE=2AC.

Теперь слѣдуетъ только доказать, что ломан. ADE>ломан. ACE. Дл сего продолжимъ AC до пересѣченія съ ED въ точкѣ H; тогда будем имѣть

$$ADH > AH \quad (\S\ 4)$$
$$CHE > CE \quad (\S\ 4)$$

слѣд.

$$ADH+CHE > AH+CE;$$

но ADH=AC+DH, CHE=CH+HE, и AH=AC+CH;
то, поставивъ равныя величины вмѣсто равныхъ, получимъ:

$$AD+DH+CH+HE>AC+CH+CE$$

отнявъ отъ обѣихъ неравныхъ величинъ CH, получимъ:

$$AD+DH+HE>AC+CE$$

или

$$ADE>ACE$$

слѣд.

$$\frac{ADE}{2} > \frac{ACE}{2}$$

или

$$AD>AC$$

Слѣдствіе 1. Изъ послѣднихъ двухъ параграфовъ явствуетъ, что изъ одной точки къ данной прямой нельзя провести трехъ равныхъ прямыхъ.

Слѣдствіе 2. Если прямая BA (черт. 26) возставлена перпендикулярно къ FC изъ ея средины B, то всякая точка A, взятая на перпендикулярѣ, равно удалена отъ концовъ данной прямой. И въ самомъ дѣлѣ разстоянія AF и AC равны, какъ наклонныя равноудаляющіяся отъ основанія перпендикуляра.

Слѣдствіе 3. Напротивъ всякая точка O, взятая внѣ перпендикуляра, не равно удалена отъ концовъ прямой. Разстояніе FO=FE+EO=EC+EO=CEO; а ломанная CEO болѣе прямой CO; и такъ O далѣе отстоитъ отъ E нежели отъ C.

V. О треугольникахъ и условія ихъ равенства.

46. Мы видѣли, что когда двѣ прямыя встрѣчаются въ точкѣ, то онѣ ограничиваютъ плоскость съ двухъ сторонъ. Если теперь себѣ представимъ, что на сторонахъ угла A (черт. 27) взяты двѣ точки E и F, произвольныя по положенію, и соединены прямою EF, то часть плоскости будетъ ограничена со всѣхъ сторонъ прямыми. (Таковая *плоскость*, со всѣхъ сторонъ прямыми ограниченная, называется *прямолинейною фигурою*). Очевидно, что плоскость можетъ ограничиваться не только тремя, но и бо́льшимъ числомъ прямыхъ, посему прямолинейныхъ фигуръ можетъ быть безчисленное множество. Онѣ получаютъ свои наименованія отъ числа угловъ, составляемыхъ прямыми. Двѣ прямыя AB и AC, встрѣчающіяся въ точкѣ, составляютъ одинъ уголъ, третья же прямая EF образуетъ съ каждою изъ первыхъ двухъ еще по одному углу; слѣд. всѣхъ угловъ 3, и посему фигура называется *треугольникомъ*. Фигуры означаются буквами, поставленными подлѣ вершины всѣхъ угловъ.

47. Во всякомъ треугольникѣ три стороны и три угла. Очевидно, что какъ стороны такъ и углы могутъ быть различны, а посему и треугольники весьма различествуютъ по своей формѣ.

48. Положимъ, что требуется *начертить треугольникъ, коего стороны были бы равны даннымъ прямымъ* a, b, c (черт. 28). Отложимъ на произвольно проведенной прямой NM, отъ точки N до O линію NO, равную которой-нибудь изъ данныхъ прямыхъ, напримѣръ a, потомъ опишемъ изъ точекъ N дугу rs радіусомъ равнымъ другой прямой b, а изъ O дугу tu радіусомъ равнымъ третьей прямой c. Соединивъ точку пересѣченія P съ N и O прямыми NP и PO, составимъ требуемый треугольникъ, потому что NO=a, по условію, NP=b, какъ радіусы одной и той же дуги, PO=c, по той же причинѣ.

49. Чтобъ можно было получить точку пересѣченія P, очевидно. что NP съ PO должны быть болѣе NO, потому что въ противномъ случаѣ дуги

xs и *tu* не пересѣклись бы, и по сему нельзя было бы составить треугольника. Изъ сего слѣдуетъ, что для составленія треугольника изъ данныхъ трехъ прямыхъ, необходимо условіе, чтобы *сумма двухъ данныхъ прямыхъ была болѣе третьей.*

50. Изъэтого явствуетъ, что ничего не препятствуетъ предположить, что изъ трехъ данныхъ прямыхъ двѣ между собою равны, третья же не равна имъ; въ такомъ случаѣ построимъ треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равныя. Сдѣланное условіе также допускаетъ, чтобы всѣ три прямыя были равны между собою.

51. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что можно составить треугольники трехъ радовъ: 1) въ которыхъ всѣ стороны неравны между собою, и таковые называются *неравносторонними* (черт. 28); 2) въ которыхъ двѣ стороны равныя—такіе называются *равнобедренными* (черт. 33), наконецъ 3) въ которыхъ всѣ стороны равны между собою — такіе треугольники называются *равносторонимм* (черт. 35).

Что касается до угловъ въ треугольникахъ, то также могутъ быть три различныхъ случая: 1) всѣ три угла могутъ быть острые (черт. 28); 2) одинъ только изъ трехъ угловъ можетъ быть прямой (черт 37); 3) одинъ изъ нихъ можетъ быть тупой (черт. 40). Въ послѣдствіи (§ 66, 67) будетъ это доказано. Въ первомъ случаѣ треугольники называются *остроугольными*, во второмъ *прямоугольными*, въ третьемъ *тупоугольными*.

52. *Во всякомъ треугольникѣ сумма двухъ сторонъ болѣе третьей.*

Въ самомъ дѣлѣ въ треугольникѣ NPO (черт. 28) $NP+PO>NO$, потому что прямая NO менѣе ломанной NPO, проведенной между однѣми и тѣми же точками N и O; ломанная же NPO состоитъ изъ сторонъ NP и PO. Отсюда слѣдуетъ, что во всякомъ треугольникѣ сумма двухъ сторонъ болѣе третьей.

53. *Если внутри* △ABC (черт. 29) *возьмемъ произвольную точку* D, *и проведемъ къ концамъ стороны* AC *прямыя* DA *и* DC, *то сумма этихъ прямыхъ менѣе суммы остальныхъ двухъ сторонъ* AB и BC.

Продолживъ AD до пересѣч. съ BC въ E, получимъ:

$$AE<AB+BE \quad (\S\ 52)$$
$$DC<DE+EC \quad (\S\ 52)$$

слѣд. $AE+DC<AB+BE+DE+EC$ (§ 8).

Подставивъ въ первой величинѣ вмѣсто AE составляющія ея прямыя $AD+DE$, получимъ:

$$AD+DE+DC<AB+BE+DE+EC.$$

но $BE+EC=BC$; то и слѣдуетъ, что

$$AD+DC<AB+BC.$$

На этомъ выводѣ основано доказательство слѣдующаго важнаго предложенія въ Геометріи:

54. *Если три стороны одного треугольника равны порознь тремъ сторонамъ другаго, то треугольники равны.*

Пусть будутъ данные треуг. ABC и DEF (черт. 30 I и III) и $AC=DF$, $AB=DE$, $BC=EF$. Представимъ себѣ, что треугольникъ ABC наложенъ на △DEF, и притомъ такъ, чтобы AC совмѣстилась съ DF, то для вершины △-ка ABC можно принять четыре различныя положенія. Во 1-хъ она можетъ упасть внутри треугольника DEF; во 2-хъ на которую нибудь изъ его сторонъ; въ 3-хъ, внѣ треугольника; наконецъ въ 4-хъ, въ вершину △DEF. Разберемъ, который изъ этихъ случаевъ возможенъ.

1-й случай, (черт. 30 I и III). Пусть вершина падаетъ въ точку G; тогда $DG=AB$, $GF=BC$. слѣд.

$$DG+GF=AB+BC,$$

но, по условію, и $DE+EF=AB+BC$ (потому что $AB=DE$. $BC=EF$); слѣд.

$$DG+GF \text{ было бы} =DE+EF \quad (\text{по VI акс. } \S\ 8);$$

но этого быть не можетъ, потому что, по § 53, $DG+GF$ должны быть меньше $DE+EF$; слѣд. вершина B не можетъ упасть въ точку G.

2-й случай, (черт. 30. I и IV). Если положимъ, что вершина B надаетъ на сторону EF въ точкѣ H, то имѣли бы явное противорѣчіе, потому что тогда бы BC была равна HF, части стороны EF, которая, по положенію, равна цѣлой BC.

3-й случай, (черт. 30 I и V). Примемъ теперь, что вершина B надаетъ внѣ треугольника DEF, въ точку K; тогда бы

$$DI+IE>DE \quad (\S\ 52)$$
$$FI+IK>KF \quad (\S\ 52)$$

слѣд. $DI+IE+FI+IK>DE+KF$

но $DI+IK=DK$, $IE+FI=EF$

слѣд. $DK+EF>DE+KF \quad (a)$

но, по строенію, $DK=AB$, а AB по положенію$=DE$,

слѣд. $DK=DE$;

по той же причинѣ $KF=EF$

Поставимъ въ урав. (*a*) DE вмѣсто DK, и EF вмѣсто KF, получили бы $DE+EF>DE+EF$,

что совершенно не возможно, а по сему и предположеніе несправедливо.

4-й случай. И такъ вершина не можетъ упасть ни внутри △DEF, ни на одну изъ его сторонъ, и не внѣ его, слѣд. должна упасть въ вершину E: и тогда DE совмѣстится съ AB, а EF съ BC, и треугольники взаимно совершенно закроютъ другъ друга, и посему будутъ равны.

Другое доказательство.

Пусуь будутъ данные треуг. ABC и DEF (черт. 30. I и II) и пусть AC=DF, AB=DE, BC=EF. Представимъ себѣ, что △ABC наложенъ на △DEF, и притомъ такъ, чтобъ сторона AC совмѣстилась съ DF, что всегда возможно, потому что AC=DF. Чтобъ опредѣлить точку, въ которую должна упасть вершина B, треуг. ABC, вообразимъ себѣ, что изъ точки D стороны DF, какъ изъ центра описана дуга *nm*, которой радіусъ былъ бы равенъ DE или AB; при такомъ условіи дуга *nm* должна непремѣнно пройти черезъ точку E. Далѣе, опишемъ еще дугу *pq* изъ точки F, какъ изъ центра; принявъ FE=CB за радіусъ, то и дуга *pq* должна непремѣнно пройти чрезъ точку E, которая по сему будетъ находиться въ общемъ пересѣченіи обѣихъ дугъ.

Мы выше видѣли, что △ ABC наложенъ на △DEF такъ, что AC совмѣщалась съ DF, точка A съ D, а C съ F. Что AB падаетъ на DE, нельзя еще утверждать, потому что неизвѣстно, равны ли углы A и D; но непремѣнно конечная точка B стороны AB упадетъ на дугу *nm*, (ибо еслибъ она упала въ какую нибудь точку G или H внѣ дуги *nm*, то тогда бы радіусъ дуги не равнялся сторонѣ AB или DE, что противно условію). Такимъ же образомъ докажемъ, принимая B за конечную точку стороны CB, что одна должна непремѣнно упасть и на дугу *pq*. И какъ одна и тажа точка не можетъ находиться на двухъ дугахъ иначе, какъ только въ общой ихъ точкѣ пересѣченія; то изъ того и слѣд.; что точка B должна совмѣститься съ общимъ пересѣченіемъ E, то обѣихъ дугъ *nm* и *pq*. Если же точка B совмѣстится съ E, то сторона AB совмѣстится съ DE, а BC съ EF; а изъ сего слѣдуетъ, что и △ABC и △DEF совмѣстятся, и посему будутъ равны во всѣхъ своихъ частяхъ.

55. Изъ того, что треугольники ABC и DEF взаимно совершенно закрываютъ другъ друга, слѣдуетъ, что и ∠A=∠D, ∠B=∠E, ∠C=∠F, то есть *въ равныхъ треугольникахъ углы, противолежащіе равнымъ сторонамъ, равны между собою.* Углы противолежащіе равнымъ сторонамъ, будемъ называть соотвѣтсвующими углами треугольниковъ.

56. Вы видѣли (§ 54), что если три стороны одного треугольника равны порознь тремъ сторонамъ другаго, то треугольники равны. Если же только двѣ стороны одного треугольника были бы равны порознь двумъ сторонамъ другаго, то очевидно, что нельзя было бы заключить о равенствѣ треугольниковъ, потому что можно себѣ вообразить множество треугольниковъ, имѣющихъ по двѣ равныхъ стороны, такъ какъ уголъ, между ними содержащійся, можетъ измѣняться до безконечности. И такъ второе условіе равенства треугольниковъ будетъ слѣдующее:

57. *Треугольники равны, когда двѣ стороны одного равны порознь двумъ сторонамъ другаго, и углы, между равными сторонами заключающіеся, равны.*

И въ самомъ дѣлѣ, пусть (черт. 31) AB=DE. ∠A=∠D, AC=DF. Наложимъ треугольникъ ADC на треугольникъ DEF такъ, чтобы AC, по равенству, совмѣстилась со стороною DF, то есть, чтобы A упала въ D, а C въ F, то по равенству угловъ A и D, AB упадетъ на DE и, по равенству, съ нею совершенно совмѣстится, то есть точка B упадетъ въ точку E. И тогда сторона BC находилась бы между точками E и F; а какъ между тѣми-же точками лежитъ сторона EF, и между двумя точками можетъ быть проведена только одна прямая, то изъ того и слѣдуетъ, что BC совпадетъ съ EF, а посему и △ ABC совершенно совмѣстится съ △DEF.

58. Разсмотримъ теперь, будутъ ли *треугольники равны, если сторона и прилежащіе два угла одного равны порознь сторонѣ и прилежащимъ двумъ угламъ другаго.*

Пусть (черт. 32) AC=DF, ∠A=∠D, ∠C=∠F. Представимъ себѣ, что △ABC наложенъ на △DEF такъ, чтобы A упала въ D, и AC на DF, то по равенству прямыхъ, точка C упадетъ въ F. По равенству угловъ A и D, AB упадетъ на DE, и точка B непремѣнно должна совмѣститься съ какою нибудь точкою прямой DE; по той же причинѣ CB упадетъ на FE и та же точка B непремѣнно совмѣстится съ какою нибудь точкою стороны EF; слѣд. точка B должна находиться на DE и EF, и посему совпасть съ ихъ общею точкою E, потому что въ этой точкѣ можетъ она въ одно время быть на обоихъ сторонахъ. Если же B совмѣстится съ E, то AB совершенно совпадетъ съ DE, а BC съ EF, а посему и треугольники совмѣстятся.

59. Изъ того, что AB=DE, BC=EF, и изъ равенства угловъ C и F, A и D слѣдуетъ, что *въ равныхъ треугольникахъ, равнымъ угламъ противолежащія стороны равны.*

VI. О взаимномъ отношеніи сторонъ и угловъ въ треугольникахъ вообще.

60. *Во всякомъ треугольникѣ* ABC (черт. 33), *равнымъ сторонамъ* AB и BC *противолежатъ равные углы* C *и* A.

Соединивъ вершину треугольника B съ D, срединою неравной стороны AC, прямою BD, получимъ два равныхъ треугольника ABD и BDC, потому что AD=CD, AB=BC, по положенію, а сторона BD есть общая (§ 54); изъ равенства которыхъ и слѣдуетъ, что ∠C=∠A (§ 55).

61. Слѣдствіе. Въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ три угла равны, потому что противолежатъ равнымъ сторонамъ (черт. 35).

62. *Большей сторонѣ въ треугольникѣ противолежитъ большій уголъ.*

Пусть (черт. 34) AB>BC. Возставимъ изъ E, средины третьей стороны AC, перпендикуляръ OE, который пересѣчетъ большую сторону AB, потому что B далѣе отстоитъ отъ A нежели отъ C (§ 45). Соединивъ точку пересѣченія O съ C прямою OC, получимъ два равныхъ треугольника AOE и CEO (§ 57); изъ ихъ равенства слѣдуетъ, что ∠OCE=∠OAE. Уголъ же BCA болѣе ∠OCE, составляющаго только часть его: слѣд. ∠BCA,> ∠OAE, что и доказать надлежало.

63. Изъ послѣднихъ двухъ предложеній очевидно проистекаютъ слѣдующія два, имъ обратныя: I. *Большому углу въ треугольникѣ противолежитъ большая сторона.*

Пусть (черт. 34) ∠C>∠A. Сравнивая стороны AB и BC, мы можемъ получить три вывода: AB можетъ быть 1) меньше, 2) равна, 3) больше BC.

1) Если AB была бы менѣе BC, то (по § 62) и ∠C былъ бы менѣе ∠A, что было бы противно условію; посему AB не можетъ быть менѣе BC.

2) Если AB была бы равна BC, то (по § 60) и ∠C былъ бы равенъ ∠A, что также противно условію.

И такъ, какъ AB не можетъ быть ни менѣе ни равна BC, то она должна быть болѣе BC.

64. II. Точно такимъ же образомъ докажемъ, что въ *треугольникѣ* ABC (черт. 33), *равнымъ угламъ C и A противолежатъ равныя стороны*, потому что если ∠C=∠A, то AB не можетъ быть ни менѣе и ни болѣе BC. Въ первомъ случаѣ ∠C былъ бы менѣе, а во второмъ болѣе ∠A, что противно сдѣланному условію.

65. Если продолжимъ которую нибудь сторону AC треугольника ABC (черт. 36), то составится продолженіемъ CD и прилежащей стороною BC уголъ BCD, находящійся внѣ треугольника. Таковой уголъ называется *внѣшнимъ угломъ* треугольника.

Внѣшній уголъ BCD *всегда болѣе каждаго изъ внутреннихъ, съ нимъ несмежныхъ напр.* ∠ABC. Для доказательства слѣдуетъ только вершину другаго угла A соединить съ срединою противолежащей стороны E прямою AE, продолжить ее, и сдѣлать продолженіе EF=AE, и наконецъ провести прямую CF, △CEF=△AEB, потому что CE=EB, ∠CEF=∠AEB, EF=AE (§ 57); изъ сего же равенства слѣдуетъ, что ∠ABE=∠BCF (§ 55), но уголъ ECF есть только часть угла BCD, и посему ∠ABC>∠BCD.

Чтобъ доказать, что внѣшній ∠BCD болѣе другаго внутренняго BAC, надобно сдѣлать подробное строеніе, соединивъ вершину угла B съ срединою противолежащей стороны AC.

66. Слѣдствіе. 1. Если одинъ изъ внутреннихъ угловъ BCA (черт. 37) прямой, то внѣшній уголъ BCD, какъ смежный ему (§ 26), также прямой. Но какъ, по § 65, ∠BCD болѣе ∠A и ∠B, то каждый изъ нихъ

долженъ быть острый. И такъ если въ треугольникѣ одинъ уголъ прямой, то другіе два должны быть острые, и такой треугольникъ называется *прямоугольнымъ*. Сторона противолежащая прямому углу называется *гипотенузою*, а заключающія его стороны *катетами*.

67. Слѣдствіе 2. Если положимъ, что ∠ BCA тупой, то внѣшній ∠BCD, какъ смежный ему (§ 26), острый; а изъ этаго слѣдуетъ, что внутренніе углы CAB и ABC должны быть также острые (§ 65). И такъ если въ треугольникѣ одинъ уголъ тупой, то другіе два должны быть острые, и такой треугольникъ называется *тупоугольнымъ* (§ 51).

Если же въ треугольникѣ всѣ углы острые, то въ такомъ случаѣ треугольникъ называется *остроугольнымъ* (§ 51).

68. Заключимъ эту статью предложеніемъ, въ которомъ изслѣдуется измѣненіе угловъ, зависящее отъ измѣненія сторонъ. Въ § 57 было доказано, что если двѣ стороны и уголъ, между ними заключающійся, однаго треугольника равны двумъ сторонамъ и углу между ними заключающемуся другаго, то треугольники равны. Докажемъ теперь, что если углы при тѣхъ же условіяхъ будутъ неравны, то и противолежащая стороны также будутъ неравны, и большому углу противолежащія сторона болѣе стороны противолежащей меньшому углу.

Пусть (см. черт. 38 I и II) въ данныхъ треугольникахъ ABC и A′DC′ сторона AB=A′D, AC=A′C′, а ∠A<∠DA′C′; слѣдуетъ доказать, что BC<DC′.

Наложимъ △ ABC на △ A′DC′ такъ, чтобы стороны AC и A′C′ совмѣстились, то по неравенству угловъ A и DA′C′ сторона AB не упадетъ на A′D, но упадетъ внутри △A′DC′, такъ какъ ∠A менѣе угла DA′C′. Присемъ могутъ быть три случая: конечная точка B можетъ упасть 1) внути △-ка, 2) на противолежащую сторону и 3) внѣ треугольника.

1-й случай. Пусть (черт. 38, I и II) B падаетъ въ B′; при этомъ предположеніи △ABC былъ бы равенъ △A′B′C′, и BC=B′C′. Но § 53.

$$A'B'+B'C'<A'D+DC'$$

но A′D по условію=AB, а AB=A′B′, слѣд. A′D.=A′B′. Отнявъ отъ неравныхъ величинъ равныя, получимъ:

$$B'C'<DC', \text{ слѣд. и } BC<DC'.$$

2-й случай. Пусть (черт. 38: I III) AC=A″C″, AB=A″E, ∠A<∠EA″C″, и точка B падаетъ въ B″ стороны EC″, тогда сторона BC равняется B″C″, только части стороны EC″, слѣд. менѣе стороны EC″.

3-й случай. Пусть (черт. 38. I IV) AC=A‴C‴, AB=A‴F, ∠A<∠FA‴C‴, и точка B падаетъ внѣ треугольника въ точку B‴, тогда △ABC=△A‴B‴C‴ и AB=A‴B‴=A‴F, BC=B‴C‴.

$$A'''F<FG+A'''G$$
$$B'''C'''<B'''G+GC'''$$

слѣд. $A'''F+B'''C''' < FG+B'''G+A'''G+GC'''$

или $A'''F+A'''C < FC'''+A'''B'''$

Отнявъ отъ этихъ неравныхъ величинъ равныя величины $A'''F$ и $A'''B'''$, получимъ

$B'''C'''$ или $BC < FC'''$,

69. Обратно предложеніе также справедливо. Пусть (черт. 38. I и II) AC=A′C′, AB=A′D, и BC<DC′. Уголъ A долженъ быть менѣе угла DA′C′. Еслибъ уголъ A былъ равенъ углу DA′C′, то сторона BC была бы равна DC′; если бы уголъ A былъ болѣе угла DA′C′, то BC была бы болѣе DC′. Но сторона BC, по условію, ни равна и не болѣе DC′ посему и ∠A менѣе угла DA′C′. И такъ проч.

VII. Объ условіяхъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ.

70. Въ предъидущихъ параграфахъ (§ 54, 57 58) показаны условія равенства всѣхъ треугольниковъ вообще, а посему они относятся и къ прямоугольнымъ. Но равенство послѣднихъ, какъ болѣе опредѣленныхъ по своей формѣ, можетъ быть доказано и при другихъ условіяхъ, которыя недостаточны для треугольниковъ вообще. Такимъ образомъ можно доказать, что *прямоугольные треугольники равны, если гипотенуза и одинъ изъ острыхъ угловъ одного равны гипотенузѣ и одному острому углу другаго.*

Пусть (черт. 39) углы C и F прямые, AB=DE, и ∠A=∠D. Если докажемъ, AC=DF, то вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ предложеніе, потому что въ такомъ случаѣ треугольники должны быть равны, по § 57. Мы можемъ принять только три случая: AC можетъ быть 1) менѣе, 2) болѣе. 3) равна DF.

Первый случай. Пусть AC<DF. Отложивъ на DF часть DG=AC, и соединимъ точку G съ E прямою GE. △DGE=△ABC (§ 57); а изъ равенства слѣдуетъ, что ∠ACB=∠DGE; но ∠ACB, по условію, прямой; слѣд. и ∠DGE былъ бы прямой, то есть, при этомъ условіи, мы бы имѣли два перпендикуляра EG и EF, проведенные изъ точки E къ прямой DF, что невозможно; а посему невозможно положить, что AC<DF.

Второй случай. Пусть AC>DF. Подобнымъ же способомъ докажемъ, что и это предположеніе невозможно,

Третій случай. И такъ, какъ AC не можетъ быть ни менѣе, и ни болѣе DF, то AC=DF; и тогда △ABC=△DEF. И посему прямоугольные треугольники равны, если и проч.

71. Также *прямоугольные треугольники равны, если гипотенуза и одинъ изъ катетовъ одного равны гипотенузѣ и катету другаго.*

Пусть (черт. 40) AB=DE. BC=EF, и ∠C=∠F, какъ прямые. И это

предложеніе можетъ быть приведено къ первому случаю равенства треугольниковъ, (§ 54) если только докажемъ, что AC не можетъ быть болѣе или менѣе CF, а должна быть ей равна.

1-й случай. Пусть AC>DF. Отложимъ на AC отъ точки C линію GC=DF, и соединимъ G съ B прямою GB. Въ такомъ случаѣ составленный △GBC=△DEF (по § 57); изъ равенства же ихъ слѣдуетъ, что BG=ED; но ED по условію, равна AB; посему и BG была бы равна AB, а это противно прежде доказанному предложенію (§ 45). потому что наклонныя, неравно удаляющіяся отъ основанія перпендикуляра, не могутъ быть равны. А посему и предположеніе что AC>DF, не можетъ имѣть *мѣста.*

2-й счучай. Пусть AC∠DF. И это предположеніе опровергается точно такимъ же образомъ.

3-й случай. И такъ какъ AC не можетъ быть ни болѣе, и ни менѣе DF, то AC должна быть равна DF. Изъ равенства же этихъ прямыхъ будетъ слѣдовать равенство треугольниковъ ABC и DEF (§ 54).

72. Изъ § 55 видно, что *всѣ* треугольники равны, если имѣютъ по двѣ равныхъ *стороны*, и если, сверхъ того; углы, *между* ними заключающіеся, равны. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ послѣднее условіе не есть необходимое: равные углы могутъ и не быть заключаемы равными старонами, и все же равенство треугольниковъ имѣетъ мѣсто. Разсмотримъ теперь различные случаи, въ которыхъ треугольники, имѣющіе по двѣ равныхъ *стороны*, и коихъ равные углы не заключаются между равными сторонами, бываютъ равны и неравны.

73. Пусть будетъ (черт. 41) ∠A острый и равенъ∠D, AB=DE, BC=EF. Здѣсь могутъ быть еще два условія: a) когда сторона данному углу противолежащая будетъ болѣе прилежащей, b) когда противолежащая сторона менѣе прилежащей.

a) Пусть BC>AB, слѣд. и EF>DE. Представимъ себѣ, что△DEF наложенъ на △ABC такъ чтобы DE совмѣщались съ AB, то по равенству угловъ A и D, DF упадаетъ на AC, и точка F должна также упасть на AC, или ея продолженіе. Теперь слѣдуетъ опредѣлить положеніе стороны FF. Если бы она упала внутри треугольника между AB и BC, по какой бы ни было сторонѣ перпендикуляра BG, она была бы (по § 45) менѣе BC; если же она упала внѣ треуголника далѣе стороны BC, то она была бы болѣе BC (по § 45). Но какъ EF ни менѣе и не болѣе, а равна BC, то она и не можетъ иначе упасть какъ на самую линію BC. А изъ этого слѣдуетъ, что треугольники ABC и DEF должны совмѣщаться.

b) Пусть BC>AB (черт. 42), слѣд. и EF∠ED. Положимъ △DEF на △ABC такъ, чтобы DE совмѣстилась со стороною AB. то по равенству угловъ A и D, DF упадетъ на AC, и точка F также упадетъ на прямую AC. Въ предъидущемъ случаѣ было уже объяснено, что сторона EF не

можетъ упасть внѣ треугольника, потому что она тогда была бы болѣе BC; также она не можетъ упасть между перпендикуляромъ BH и стороною BC, потому что тогда была бы менѣе BC. И такъ сторона FE можетъ упасть или на сторону BC, или на прямую BG, находящуюся по другую сторону перпендикуляра, на разстояніи GH=HC. Изъ сего слѣдуетъ, что могутъ быть два треугольника ABC и ABG, которые будутъ имѣть одинъ уголъ, равный углу D, и двѣ стороны, равныя сторонамъ DE и EF. Изъ сего слѣдуетъ, что не всегда можно заключить о равенствѣ треугольниковъ по одному равному углу и двумъ равнымъ сторонамъ, если онѣ не заключаютъ равныхъ угловъ, и если сторона противолежащая данному углу менѣе прилежащей.

Напротивъ, треугольники всегда равны, если имѣютъ по одному равному углу, и по двѣ равныхъ стороны, хотя бы эти стороны и не заключали между собою даннаго угла если только противолежащая сторона *болѣе* прилежащихъ.

74. Изъ послѣдняго заключенія слѣдуетъ, что если данные равные углы суть прямые или тупые, то въ такомъ случаѣ треугольники равны, хотя бы данныя двѣ стороны и не заключали данныхъ угловъ, потому что противолежащія имъ, какъ большимъ угламъ, (§ 63) стороны *болѣе* прилежащихъ.

VIII. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ съ помощью предшествовавшихъ предложеній.

75. Рѣшимъ теперь задачи, которыя мы предполагали возможными, какъ напримѣръ въ § 60 мы приняли, что прямая раздѣлена на двѣ равныя части; въ другихъ случаяхъ мы производили перпендикулярныя прямыя, хотя способъ проводить ихъ не былъ показанъ. Доказательства на рѣшенія этихъ задачъ и нѣкоторыхъ другихъ основаны преимущественно на теоремахъ, относящихся до равенства треугольниковъ; посему онѣ и будутъ теперь предложены, такъ какъ условія равенства треугольниковъ уже извѣстны.

76. *Раздѣлить прямую на двѣ равныя части.*

Изъ конечныхъ точекъ (чер. 43) A и B опишемъ дуги *nm* и *pq* одинакимъ произвольнымъ радіусомъ, который однакожъ долженъ быть такъ великъ, чтобъ дуги пересѣклись. Потомъ тѣмъ же радіусомъ или другимъ изъ тѣхъ же точекъ A и B опишемъ по другую сторону прямой также двѣ дуги *rs* и *tu*. Соединивъ точки N и M прямою NM, раздѣлимъ въ точкѣ O данную прямую AB на двѣ равныя части.

Чтобъ доказать, что AO=OB, надобно доказать равенство треугольниковъ AON и NOB, въ которыхъ AN=NB, по условію, и сторона NO общая; остается только еще вывести равенство угловъ ANO и BNO. Эти же

углы равны, потому что противолежатъ равнымъ сторонамъ въ равныхъ треугольникахъ ANM и BNM. (Послѣдніе же два треугольника равны между собою, потому что AN=NB, AM=MB; NM есть общая сторона (§ 54). Доказавъ равенство угловъ ANO и BNO, доказали вмѣстѣ и равенство треугольниковъ ANO и BNO, а посему и сторонъ AO BO, то есть въ точкѣ O прямая AB дѣлится на двѣ равныя части.

77. Изъ равенства треугольниковъ ANO и BON слѣдуетъ также равенство угловъ AON и BON; и какъ эти углы смежные, то они должны быть прямые, а прямая NO перпендикулярна къ AB. Изъ этаго соображенія не трудно вывесть способъ, какъ

68. *Изъ данной точки* O *прямой* AB *провести къ ней перпендикулярную* (черт. 43).

Для сего должно изъ данной точки O по обѣ стороны отложить равныя части AB и OB, потомъ изъ точекъ A и B описать произвольнымъ радіусомъ двѣ пересѣкающіяся дуги *pq* и *mn*, соединить точку N съ данною точкою O прямою ON, которая и будетъ требуемый перпендикуляръ. Изъ самаго строенія очевидно, что △AON=NOB: а изъ ихъ равенства слѣдуетъ равенство угловъ AON и BON, или что NO перпендикулярна къ AB въ точкѣ O.

79. Сдѣлавъ подобныя же соображенія можно рѣшить и слѣдующія задачи:

Изъ данной точки (черт. 44) N, *внѣ прямой* DE *провести къ ней перпендикуляръ.* NO.

Для сего должно поступить въ обратномъ порядкѣ: изъ данной точки N должно описать дугу такимъ радіусомъ, чтобы дуга *rs*, данную прямую DE, пересѣкла въ двухъ точкахъ A и B. Раздѣливъ AB на двѣ равныя части, и соединивъ средину O съ N, получимъ требуемый перпендикуляръ.

Равенство треугольниковъ AON и BON очевидно; а изъ сего слѣдуетъ равенство угловъ AON и BON, а посему и перпендикулярность прямой NO къ данной прямой DE.

80: *Данный уголъ* ANB *раздѣлить на двѣ равныя части* (черт. 45).

Отъ вершины даннаго угла отложимъ на его сторонахъ равныя части NA и NB, потомъ опишемъ двѣ пересѣкающія дуги *tu* и *rs* изъ точки A и B и соединимъ точку пересѣченія M съ вершиною N. Прямая NM раздѣлитъ уголъ ANB на двѣ равныя части *a* и *b*. Равенство этихъ угловъ явствуетъ изъ равенства треугольниковъ NAM и NBM (§ 54).

81. *Построить треугольникъ равный данному треугольнику* ABC (черт. 46).

Эта задача можетъ быть рѣшена различными способами:

I. Можно построить треугольникъ, котораго три стороны были бы равны

тремъ сторонамъ даннаго треугольника. и этотъ способъ уже показан въ § 48, гдѣ, вмѣсто сторонъ треуголника, взяты три прямыя.

82. II. Можно построить треугольникъ, котораго двѣ стороны равн были бы двумъ сторонамъ даннаго △-ка, и сверхъ того углы меж ними заключающіеся равны (§ 57). Для сего (чер. 46. I и II) на пр извольной прямой DH отложивъ DE=AC, построимъ на ней ∠GDH= ∠A (§ 34), и отложимъ на его сторонѣ DG, часть DF=AB. Соединив точки F и E прямою FE, составимъ требуемый треугольникъ, что совер шенно явствуетъ изъ самаго построенія (§ 57).

III. Отложивъ (черт. 46. I и III) на прямой KP часть KI=AC и н чертивъ (§ 34) къ точкѣ K уголъ MKI=∠BAC, а въ уголъ NIK=BC составимъ также △LKI равный △ABC, потому что сторона KI и при лежащіе два угла K и I равны сторонѣ AC и прилежащимъ двумъ угл мъ A и C (§ 58).

IX. Параллельныя линіи.

83. Въ § 43 было доказано, что изъ точки, взятой внѣ прямой, мож провести къ ней только одинъ перпендикуляръ; изъ этого слѣдуетъ, чт если изъ двухъ точекъ D и E (черт. 47), взятыхъ на прямой AB, воз ставимъ два перпендикуляра DE и EG, то эти двѣ прямыя никогда н могутъ встрѣтиться, потому что, еслибы мы положили, что онѣ встрѣ чаются въ какой нибудь точкѣ O, то мы бы допустили два перпендику ляра OFD и OGE изъ одной точки къ одной прямой DE.

84. Такимъ же образомъ получили бы двѣ никогда не встрѣчающіяся пря мыя DF и EG (чарт. 48), если бы ихъ провели такъ, чтобы онѣ соста вили равныя углы a и b съ прямою AB. Если бы DF и EG пересѣка лись въ какой нибудь точкѣ O, то составился бы треугольникъ OED, в которомъ внѣшній уголъ a былъ бы равенъ внутреннему b, что против но прежде доказанному предложенію (§ 65).

85. И такъ мы видимъ, что могутъ существовать прямыя, которы находясь на одной плоскости и какъ бы далеко ни были продолжены никогда не встрѣчаются. Таковыя прямыя называются *параллельными* Для означенія параллельности линій употребляется знакъ: ||

86. Если двѣ параллельныя прямыя пересѣкаются третью, то составля ются 8 угловъ, которые получаютъ различныя наименованія (черт. 49).

Углы c, d, e, f, внутреннихъ
a, b, g, h, внѣшнихъ
a и e
d и h
b и f
c и d } соотвѣтственныхъ или угловъ наклоненія.

c и e
d и h } внутренно-противоположныхъ или накрестъ лежащихъ.
b и h
a и d } внѣшно-противоположныхъ или накрестъ лежащихъ.

87. Въ §§ 77 и 78 мы полагали (черт. 48), что

$$a=b;$$
$$\text{но } a+c=2\ d,$$
$$\text{слѣд. } b+c=2\ d,$$

то есть *сумма двухъ внутреннихъ угловъ параллельныхъ линій, по одной сторонѣ сѣкущей находящихся, равна двумъ прямымъ угламъ.*

88. Обратное предложеніе также должно быть справедливо, то есть, что если сумма внутреннихъ угловъ менѣе двухъ прямыхъ, то въ такомъ случаѣ прямыя не параллельны; напр. *если изъ двухъ прямыхъ* (черт. 50) AB *и* DC, *только одна* AB*перпендикулярна къ сѣкущей* CB, *а другая наклонна, то такія двѣ прямыя, по довольномъ продолженіи, пересѣкутся*; эта истина такъ очевидна, что можетъ быть принята за аксіому, тѣмъ болѣе, что доказательства до сихъ поръ извѣстныя, не совершенно точны.

89. Мы помѣстимъ здѣсь доказательство г. Бертрана, какъ одно изъ самыхъ простѣйшихъ. Пусть (черт. 50) AB перпендикулярна къ CB, а наклонная DC составляетъ съ нею острый уголъ DCB. Для доказательства, что продолженная CD пересѣкаетъ AB, возставимъ изъ точки C перпендикуляръ CF. Очевидно, что острый уголъ FCD, нѣсколько разъ отложенный, на конецъ составитъ уголъ FCK, который болѣе прямаго, слѣд. неопредѣленное пространство ∠FCD составляетъ извѣстную часть неопредѣленнаго пространства прямаго угла FCS. Также очевидно, что на сторонѣ CS прямаго угла FCS, можно отложить прямую CB безчисленное множество разъ, такъ какъ сторона CS можетъ быть продолжена неопредѣленно. Возставивъ изъ точекъ дѣленія M, O, Q, S, и пр. перпендикуляры ML, ON, QP, SR, образуемъ такое же число неопредѣленныхъ пространствъ ABML, LMON, NOQP, PQSR и т. д., которыя всѣ будутъ совмѣщаться съ пространствомъ FCBA, по причинѣ равенства прямыхъ CB, BM, MO, OQ, и т. д. и равенства прямыхъ угловъ. Неопредѣленное пространство FCBA заключается въ неопредѣленномъ пространствѣ прямаго угла FCS безчисленное число разъ, слѣд. оно въ сравненіи съ послѣднимъ безконечно мало; между тѣмъ какъ неопредѣленное пространство FCD составляетъ опредѣленную его часть. Изъ этого же должно заключить, что неопредѣленное пространство FCD болѣе неопредѣленнаго пространства FCBA, слѣд. первое не можетъ заключаться во второмъ. А какъ первое пространство FCD со вторымъ имѣетъ одну сторону CF и вершину общія, то другая непремѣнно должна выйти изъ пространства FCBA;

этого же не можетъ быть безъ того, чтобы CD не пересѣкла продолжонную BA.

Предложеніе это точно такимъ же образомъ доказывается, когда $\angle DCB$ будетъ тупой, съ тѣмъ только различіемъ, что въ такомъ случаѣ прямыя пересѣкаются по другую сторону линіи CB.

90. Теперь не трудно доказать предложенія обратныя тѣмъ, которыя были доказаны въ §§ 83, 84.

I. *Если изъ двухъ параллельныхъ* FD *и* EG, (черт. 47), *одна* (EG) *перпендикулярна къ третьей прямой* ED, *то и другая* ED *также будетъ къ ней перпендикулярна.* Если бы DF не была перпендикулярна, то она бы составляла съ ней острый или тупой уголъ: въ первомъ случаѣ она пересѣкла бы по § 89 прямую EG вверху, а во второмъ внизу. То и другое противно условію; слѣ. FD должна быть перпендикулярна къ DE.

91. II. *Если двѣ параллельныя прямыя* AB *и* CD (черт. 51) *пересѣкаются третью* FE, *то внутренно накрестъ лежащіе углы a и b равны.*

Чтобы доказать требуемое, опустимъ изъ средины G прямой KI перпендикуляръ GH къ AB, и продолжимъ до пересѣченія съ CD въ точкѣ L, то по § 90, GL должна быть перпендикулярна къ CD, то есть $\angle GLK = \angle GHI$ какъ прямые. Сверхъ сего въ треугольникахъ GLK и GHI, сторона $GK = GI$ по условію, и $\angle KGL = \angle IGH$ (по § 30), и посему $\triangle GLK = \triangle GHI$, а изъ равенства треугольниковъ и слѣдуетъ, что $\angle a = \angle b$.

92. Докажемъ теперь справедливость предложенія изложеннаго въ § 88, и въ томъ случаѣ когда углы будутъ произвольны, то есть *если* (черт. 52) *двѣ прямыя* AB и CD *пересѣкаютъ третью* FE. *наклонную къ каждой изъ нихъ, такъ что сумма внутреннихъ угловъ* BGH *и* DHG *неравна двумъ прямымъ, то* AB *и* CD *непараллельны.*

Пусть $\angle BGH + \angle DHG < 2d$

но $\angle BGH + \angle BGE = 2d$.

слѣд. $\angle BGE > \angle DHG$, потому что къ одной и той же величинѣ должно прибавить большую величину, чтобъ получить большую сумму.

Въ точкѣ G на прямой FE отложимъ въ углѣ BGF уголъ $EGN = \angle DHG$ (§ 34), и продолжимъ сторону GN до какой нибудь точки M. Прямая MN должна быть параллельна CD (§ 84). Изъ точки O, средины прямой GH, опустимъ на CD перпендикуляръ OL, и продолжимъ его по другую сторону до пересѣченія съ MN и AB въ точкахъ K и I. Такъ какъ MN параллельная CD, то $\angle OKG$ долженъ быть прямой (§ 90); уголъ же OKG есть внѣшній для $\triangle IKG$, слѣд. (§ 65) болѣе $\angle KIG$, и посему $\angle KIG$ долженъ быть острый. И такъ теперь доказано, что прямая AB наклона къ IK, а прямая CD къ ней перпендикулярна; слѣд. AB и CD (§ 88), должны по довольномъ продолженіи, пересѣчься.

93. Въ §§ 91 и 92 доказано, что (черт. 49) если прямыя AB и CD параллельны, то противоположные углы *c* и *e* равны и сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей лежащихъ, равна двумъ прямымъ. И такъ:

$$\angle c = e \quad (1)$$

$$\angle d + \angle e = 2\,d \quad (2)$$

$$\text{но } \angle a = \angle c \ (\S\ 30):$$

$$\text{слѣд. } \angle a = \angle e \quad (3)$$

то есть *соотвѣтственные углы равны.* Въ уравн. (2) вставимъ равныя величины вмѣсто равныхъ:

$\angle d = \angle b$ (§ 30), и $\angle e = \angle g$, получимъ:

$$\angle a + \angle g = 2\,d. \quad (4)$$

то есть *сумма внѣшнихъ, по одну сторону сѣкущей лежащихъ, угловъ равна двумъ прямымъ.*

94. Если при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьею, которое нибудь изъ упомянутыхъ условій имѣетъ мѣсто, то въ такомъ случаѣ пересѣкаемыя прямыя параллельны. Пусть напримѣръ AB и CD (черт. 49) пересѣкаются третьею EF такъ, что

$$\angle b + \angle g = 2\,d.$$

$$\text{По § 26 } \angle b + \angle a = 2\,d.$$

$$\text{слѣд. } \angle g = \angle a.$$

но $\angle g = \angle e$, по § 30, слѣд. $\angle e = \angle a$. А если $\angle e = \angle a$; то по § 84 прямыя AB и CD параллельны.

95. Также можно доказать, что если одно изъ означенныхъ условій въ § 93 не имѣетъ мѣста, то и другія не могутъ быть, и прямыя AB и CD не будутъ параллельны.

96. Зная выведенныя здѣсь свойства параллельныхъ линій, можно весьма легко найти способъ проводить ихъ къ даннымъ прямымъ: стоитъ только сдѣлать построеніе, основанное на какомъ нибудь изъ доказанныхъ свойствъ. Положимъ, что требуется *чрезъ данную точку* A *провести прямую параллельную къ данной прямой* BC (черт. 53).

Положимъ, что MN, проведенная чрезъ точку A (черт. 53), есть искомая, параллельная къ BC, то въ такомъ случаѣ произвольно проведенная сѣкущая AG составила бы равные углы *n* и *m*. А изъ этого выводится слѣдующее построеніе: изъ данной точки A проводятъ какую нибудь сѣкущую AG, и потомъ отлагаютъ въ A уголъ *n* равный углу *m* (по § 34), и продолжаютъ сторону AN. Прямая MN будетъ требуемая (§ 95).

97. *Чрезъ данную точку* A (черт. 54) *провести прямую* AE, *которая составляла бы съ данной прямой* BC *уголъ, равный данному углу n.*

Положимъ, что AE будетъ искомая прямая, и что $\angle o = \angle n$. Построивъ въ какой нибудь точкѣ F на прямой BC уголъ $m = \angle n$, получили бы:

$$\angle o = \angle m,$$

потому что каждый изъ нихъ былъ бы равенъ $\angle n$. Если же $\angle o = \angle m$, то AE должна быть параллельной прямой FG. Изъ этого выводится слѣдующее построеніе: на данной прямой BC, въ произвольно взятой точкѣ F слѣдуетъ начертить $\angle m = \angle n$, и потомъ чрезъ данную точку A провести прямую AE, параллельную GF, которая и составляетъ сь данною прямою BC уголъ o, равный данному n, потому что $\angle o = \angle m$ (§ 91), а $\angle m = \angle n$, по строенію.

98. Выведемъ теперь примѣчательнѣйшее свойство параллельныхъ линій, а именно: *онѣ находятся во всѣхъ точкахъ въ равномъ разстояніи.* Въ § 44 было показано, что разстояніе точки отъ прямой опредѣляется перпендикуляромъ; слѣд. для этого предложенія слѣдуетъ доказать, что перпендикуляры, изъ разныхъ точекъ одной изъ параллельныхъ опущенные на другую, равны. Пусть будутъ данныя параллельныя прямыя AC и BD (черт. 55). Изъ точекъ E и F, произвольно взятыхъ на AC, опустимъ къ BD перпендикуляры EG и FH. Для доказательства ихъ равенства проведемъ EH, и тѣмъ образуемъ два равныхъ треугольника, $\triangle EGH$ и $\triangle FHEC$ (§ 70), потому что $\angle b = d\angle$ (§ 91), EH=EH, $\angle G = F\angle$ (§ 90); а изъ равенства треугольниковъ и слѣдуетъ, что EG=FH.

99) *Двѣ прямыя AB и CD параллельныя къ третьей EF, параллельны между собою* (черт. 56). Проведя сѣкущую GH, будемъ имѣть:

$\angle a = \angle c$, потому что AB || EF

$\angle b = \angle c$, потому что CD || EF

слѣд. $\angle a = \angle b$.

Если же $\angle a = \angle b$, то, по § 95 AB || CD

100. *Параллельныя прямыя, заключающіяся между двумя параллельными равны между собою* (черт. 57).

Пусть AB || CD, AD || BD. Проведя прямую AD получимъ два равныхъ треугольника ACD и ABD (§ 58), потому что $\angle a = \angle b$, AD=CD, $\angle d = \angle c$. Изъ равенства же треугольниковъ слѣдуетъ, что AB=CD, и AC=BD.

Изъ этого предложенія прямо слѣдуетъ обратное предложеніе:

101. *Если двѣ равныя прямыя заключаются между двумя равными прямыми, то противулежащія прямыя параллельны* (черт. 57).

Пусть AB=CD и AC=BD. Проведя прямую AD получимъ два равныхъ треугольника ACD и ABD (§ 54). Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что

$\angle d = \angle c$ (1)

$\angle a = \angle b$ (2)

Изъ Уравн. (1) слѣдуетъ (§ 94), что BD || AC, а изъ уравн. (2), по той же причинѣ, что AB=CD.

102. Слѣдствіе. Двѣ прямыя AB и CD, соединяющія концы двухъ равныхъ и параллельныхъ AC и BD, также равны и параллельны. Это очевидно изъ равенства тѣхъ же треуг. ACD и ABD.

103 *Углы, составленные параллельными прямыми и обращенные въ одну сторону равны* (черт. 58).

Пусть AB || DE, BC || EF, и отверстія угловъ B и E обращены въ одну сторону. Продолжимъ сторону EF до пересѣченія съ AB въ точкѣ G, тогда

$\angle E = \angle a$, какъ соотвѣтств. углы парал. ED и AB.

$\angle a = \angle B$, какъ соотвѣтств. углы парал. GF и BC.

слѣд. $\angle E = \angle B$ (§ 8 акс. VI).

104. Выше (§ 65) было доказано, что внѣшній уголъ треугольника болѣе каждаго внутренняго съ нимъ несмежнаго; теперь, основываясь на свойствѣ параллельныхъ линій, можно опредѣлить это отношеніе точнѣе.

Продолжимъ въ данномъ треугольникѣ ABC (черт. 59) сторону AC, и проведемъ изъ точки C прямую CE || AB, которою внѣшній уголъ BCD раздѣлится на два угла n и m.

И такъ $\angle BDC = \angle n + \angle m$

но $\angle n = \angle B$, а $\angle m = \angle A$

слѣд. $\angle BCD = \angle B + \angle A$

то есть, *внѣшній уголъ треугольника не только болѣе каждаго внутренняго съ нимъ несмежнаго угла, но равенъ суммѣ внутреннихъ съ нимъ несмежныхъ угловъ.*

105. Такъ какъ внѣшній уголъ треугольника, со внутреннимъ, съ нимъ смежнымъ, составляетъ два прямыхъ (§ 26);

т. е. $\angle BCD + \angle p = 2\ d$

и какъ $\angle BCD$ (§ 104) $= \angle A + \angle B$, то

$\angle A + \angle B + \angle p = 2\ d$,

то есть *внутреннія три угла треугольника, вмѣстѣ взятые, равны двумъ прямымъ.*

106. Слѣдствіе 1. Такъ какъ сумма всѣхъ трехъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ, то въ треугольникѣ можетъ быть только одинъ прямой и одинъ тупой уголъ (см. §§ 66 и 67).

107. Слѣдствіе 2. Если два угла въ треугольникѣ извѣстны, то третій опредѣлится, когда изъ двухъ будетъ вычтена сумма извѣстныхъ двухъ угловъ. Пусть $\angle A = {}^2/_3 d$, $\angle B = {}^1/_2 d$, то $\angle C = 2\ d - ({}^2/_3 d + {}^1/_2 d) = {}^5/_6\ d$.

108. Слѣдствіе 3. Въ равнобедренномъ треугольникѣ достаточно знать одинъ уголъ, чтобъ опредѣлить остальные углы. Пусть (черт. 33).

$\angle A = \angle C$, и $\angle B = {}^4/_5\ d$; въ такомъ случаѣ

$\angle A + \angle C = 2\ d - {}^4/_5\ d = {}^6/_5\ d$

или $2\ \angle A = {}^6/_5 d$

и $\angle A = {}^3/_5 d$

Если же одинъ изъ равныхъ угловъ извѣстенъ, то и другой извѣстенъ, а посему третій опредѣлится, когда вычтемъ изъ суммы всѣхъ угловъ, то есть изъ двухъ прямыхъ, извѣстный уголъ дважды взятый.

109. Слѣдствіе 4. Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма двухъ острыхъ равна прямому.

Слѣдствіе 5. Въ равностороннемъ треугольникѣ углы постоянной величины, потому что всѣ три угла, вмѣстѣ взятые, равняются постоянной суммѣ, то есть двумъ прямымъ, и посему каждый равенъ $\frac{2}{3} d$.

X. О многоугольникахъ.

110. Мы занимались до сихъ поръ разсматриваніемъ только такихъ фигуръ, которыя составлены тремя прямыми: но плоскости могутъ быть ограничиваемы и большимъ числомъ прямыхъ, и таковыя фигуры называются многоугольниками Если фигуры составлены четырьмя прямыми то онѣ получаютъ наименованіе *четыреугольниковъ*, потому что четыре прямыхъ, своими соединеніями, образуютъ четыре угла.

111. Очевидно, что стороны и углы четыреугольниковъ могутъ быть весьма различны, и посему и четыреугольники бываютъ различныхъ родовъ.

112. На данной прямой AB (черт. 60) построимъ $\angle CAB$ при точкѣ A, а при точкѣ B уголъ ABD и, отложивъ на сторонахъ угловъ прямыя AC и DB, соединимъ точки C и D прямою CD. Такимъ образомъ составится четыреугольникъ ABDC, который получаетъ названіе *неправильнаго*, если въ немъ нѣтъ параллельныхъ сторонъ.

113. Если бы же къ прямой AB (черт. 61) проведена была AC подъ какимъ нибудь угломъ CAB, и потомъ изъ точки C прямая CD || AB, и наконецъ DB была бы не параллельна къ AC, то таковой четыреугольникъ называются *трапеціею*.

114. Если къ прямой AB (черт. 62) въ точкѣ A проведемъ прямую AD подъ косымъ угломъ DAB; потомъ изъ точки D опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ AB, а изъ точки B дугу *tu* радіусомъ равнымъ AD и соединимъ точку пересѣченія C съ D и B прямыми DC и BC, то составимъ четыреугольникъ, въ которомъ противолежащія стороны DC и BC, AD и BC равны, и $\angle BAD$ данной величины. Такъ какъ DC=AB, AD=BC, то по § 101 также DC || AB, AD || BC, и таковой *четыреугольникъ, въ которомъ противолежащія стороны параллельны, называется параллелограммомъ*.

Въ параллелограммѣ не только противолежащія стороны равны, но также и противолежащіе углы; наприм. $\angle A=\angle n$ (черт. 62), потому что $\angle A=\angle m$ (§ 103) и $\angle n$ равенъ тому же углу *m* (§ 30).

115. Если уголъ DAB, между неравными стороoами заключающійся

острый или тупой, то параллелограмъ получаетъ наименованіе *косоугольнаго* (черт. 62); если же уголъ DAB прямой, то въ такомъ случаѣ параллелограмъ называется *прямоугольнымъ* или *прямоугольникомъ* (черт. 63).

Если (черт. 93) $\angle A$ прямой, то и $\angle B$ прямой, потому что $\angle A+\angle B=2d$ (§ 87), по той же причинѣ и остальные углы D и C прямые. И такъ въ прямоугольникѣ всѣ углы прямые.

116. Если въ косоугольномъ параллелограммѣ прилежащія стороны AD и AB положимъ равными, то всѣ четыре стороны должны быть равны, и таковой параллелограмъ называется *ромбомъ* (черт. 64).

117. Если же въ прямоугольникѣ ABCD (черт. 65) положимъ прилежащія двѣ стороны равными, то въ такомъ случаѣ всѣ четыре стороны равны и таковой *четыреугольникъ, въ которомъ всѣ четыре стороны, и всѣ четыре угла равны между собою, именуется квадратомъ*.

118. Прочіе многоугольники, получающіе свои наименованія отъ числа внутреннихъ угловъ, въ нихъ находящихся, раздѣляются на *правильные* и *неправильные*. *Правильными* многоугольниками называются такіе, въ которыхъ *всѣ* стороны и *всѣ* углы равны; въ противныхъ случаяхъ, то есть когда не всѣ стороны и не всѣ углы равны, *неправильными*. Чертежъ 66-й представляетъ правильный пятиугольникъ, а чертежъ 67-й неправильный шестиугольникъ.

Для означенія многоугольника ставятъ буквы у вершины каждаго угла, и выговариваютъ ихъ по порядку.

119. Во всякомъ многоугольникѣ, слѣд. и въ четыреугольникѣ, можно принять всякую сторону за основаніе.

Прямая CB (черт. 61 и 67), соединяющая вершины двухъ какихъ нибудь угловъ, не лежащихъ на одной сторонѣ многоугольника, называется *діагональю*.

120. *Во всякомъ параллелограммѣ*: 1) *діагональ дѣлитъ его на два равныхъ треугольника*, 2) *діагонали дѣлятся пополамъ*.

1. Въ данномъ параллелограммѣ ABCD (черт. 68) діагональ AC дѣлитъ его на два равныхъ треугольника, потому что AB=CD BC=AD, и AC=AC (§ 54).

2. Что AC дѣлитъ діагональ BD на двѣ равныя части въ точкѣ O, и сама дѣлится пополамъ, это слѣдуетъ изъ равенства треуг. BOC и AOD. Треугольники же равны (§ 58) потому, что BC=AD, $\angle a=\angle c$, и $\angle b=\angle d$.

121. *Въ прямоугольникахъ діагонали равны* (черт. 69). Это явствуетъ изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ DAB и CBA, въ которыхъ DA=BC, и AB общая (§ 57), слѣд. DB=AC.

122. *Во всякомъ многоугольникѣ сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ*

равна двумъ прямымъ угламъ, взятымъ столько разъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ, безъ четырехъ прямыхъ.

Пусть будетъ (черт. 70)данный многоугольникъ ABCDEF. Изъ точки O, внутри его произвольно взятой, проведемъ прямыя въ вершины всѣхъ угловъ OA, OB, OC .... Онѣ раздѣлятъ многоугольникъ на столько треугольниковъ, сколько въ немъ сторонъ, потому что на каждой сторонѣ построенъ треугольникъ. Для краткости означимъ число сторонъ буквою n, то въ такомъ случаѣ сумма угловъ всѣхъ треугольниковъ будетъ равняться $2d \times n$, потому что сумма внутреннихъ угловъ каждаго треугольника равна $2d$ (§ 105). Но углы треугольниковъ, лежащіе вокругъ точки O не входятъ въ составъ угловъ многоугольника; слѣд. если требуется опредѣлить сумму внутреннихъ угловъ многоугольника (которую означимъ буквою N), стоитъ только изъ суммы всѣхъ угловъ треугольниковъ те есть изъ $2\,d \times n$ вычесть сумму угловъ, лежащихъ вокругъ точки O, которая (§ 29)=равна $4d$. И такъ мы и получимъ:

$$N = 2d \times n - 4d.$$

123. Это выраженіе можетъ быть замѣнено другимъ, такъ какъ въ обоихъ членахъ второй части уравненія. находимъ общаго множителя $2d$; слѣд.

$$N = 2d\,(n-2),$$

то есть *сумма внутреннихъ угловъ многоугольника равняется двумъ прямымъ угламъ, умноженнымъ на число сторонъ безъ двухъ.*

124. Изъ сего предложенія слѣдуетъ, что

сумма внутрен. угловъ въ 5-никѣ $= 2d \times 5 - 4d = 6d$
› › › › 6 › $= 2d \times 6 - 4d = 8d$
» » » » 7 › $= 2d \times 7 - 4d = 10d$
» » › » 8 » $= 2d \times 8 - 4d = 12d$

и т. д.

Если при томъ многоугольники правильные, то каждый внутренній уголъ равняется суммѣ всѣхъ угловъ, раздѣленной на число угловъ. И такъ

каждый внутрен. уголъ въ правильн. 5-никѣ $= \frac{6d}{5} = 1/5d$
» » » » » 6 » $= \frac{8d}{6} = 1\,1/3d$
» » » » » 7 » $= \frac{10d}{7} = 1\,3/7d$
» » » » » 8 › $= \frac{12d}{8} = 1\,1/2d$

125. Продолживъ стороны многоугольника (черт. 70), составимъ углы этими продолженіями и прилежащими сторонами, которые, какъ и въ треугольникахъ, называются *внѣшними*. Очевидно, что каждый внѣшній со внутреннимъ, съ нимъ смежнымъ угломъ, составляютъ два прямыхъ

угла (§ 26); слѣд. всѣ внѣшніи со всѣми внутреннеми, или сумма внѣшнихъ угловъ (которую означимъ чрезъ N′) съ суммою внутреннихъ равняются $2d$, взятыхъ столько разъ, сколько угловъ внутреннихъ или сколько сторонъ, то есть n разъ И такъ,

$$N + N' = 2d \times n$$

но по § 122

$$N = 3d \times n - 4d$$

$$\text{слѣд. } N' = 4d.$$

то есть *сумма всѣхъ внѣшнихъ угловъ, во всякомъ многоугольникѣ, равняется четыремъ прямымъ.*

Если данный многоугольникъ ABCGEF (черт. 70′) имѣетъ уголъ входящій G, то сумма внутреннихъ угловъ также равняется $2d$, умноженнымъ на число сторонъ безъ четырехъ прямыхъ, Въ этомъ легко убѣдиться, употребивъ тоже самое доказательство, т. е., проведя изъ какой нибудь точки, внутри его взятой, прямыя въ вершины угловъ. Но сумма внѣшнихъ угловъ измѣнится, въ чемъ также не трудно увѣриться. Соединивъ точки C и E, построимъ многоугольникъ ABCEF безъ входящихъ угловъ; и посему сумма его внѣшнихъ угловъ:

$$b + a + f + \angle CEH + \angle ECL = 4d.$$

Но чтобъ получить сумму внѣшнихъ угловъ даннаго многоугольн. ABCGEF, слѣдуетъ еще къ нимъ прибавить углы n, g, k; а какъ $n + g + k = 2d$, то сумма внѣшнихъ угловъ даннаго многоуг. *съ однимъ* входящимъ угломъ равняется $4d + 2d$.

Такимъ же образомъ можно вывести, что сумма внѣшнихъ угловъ многоуг. ABCDEFGH (черт. 70″) съ *двумя* входящими углами равняется $4d + 2d \times 2$, и т. д. Изъ всего же сказаннаго можно заключить, что сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника, имѣющаго n входящихъ угловъ, равняется $4d + 2d \times n$, т. е., для опредѣленія суммы внѣшнихъ угловъ въ многоугольникѣ со входящими углами, слѣдуетъ только къ $4d$ прибавить столько разъ $2d$, сколько входящихъ угловъ.

Глава II.

О КРУГѢ.

1. О хордахъ, сѣкущихъ и касательныхъ.

126. Въ § 18 уже замѣченой что въ первоначальной Геометріи разсматривается изъ кривыхъ линій только простѣйшая, называемыя *круговою* или окружностью, и которой свойство состоитъ въ томъ, что всѣ ея точки находятся въ равномъ разстояніи отъ точки внутри ея взятой, называемой *центромъ*.

Изъ этого опредѣленія очевидно слѣдуетъ, что двѣ круговыя линіи или два круга равны, если ихъ радіусы равны, и что они могутъ совмѣщаться.

Такъ какъ всѣ точки круговой линіи находятся въ равномъ разстояніи отъ ихъ центра, то изъ того слѣдуетъ, что прямая можетъ пересѣчь окружность только въ двухъ точкахъ, потому что еслибъ она имѣла три общія точки съ окружностію, то изъ центра проведенныя къ нимъ три прямыя были бы равны. Но изъ одной точки (§ 45) къ данной прямой можно провести только двѣ равныя прямыя; слѣд. прямая съ окружностью болѣе двухъ общихъ точекъ имѣть не можетъ, то есть *прямая не можетъ пересѣчь окружности болѣе нежели въ двухъ точкахъ.*

Прямая AB (черт. 91), проходящая чрезъ центръ круга C, и соединяющая двѣ точки окружности, называется *поперечникомъ* или *діаметромъ.*

127. Изъ опредѣленія круговой линіи слѣдуетъ, что *діаметръ раздѣляетъ окружность и кругъ на двѣ равныя части.* Представимъ себѣ (черт. 71), *что* кругъ A*n*B*m* согнутъ вдоль діаметра, и верхняя часть положена на нижнюю, и что какая нибудь точка *n* верхней дуги упала внѣ нижней дуги въ точку g. Прямая Og, соединяющая центръ съ g, болѣе прямой O*m*, слѣд. точка g, далѣе отстоитъ отъ центра O нежели точка *m*, а посему и точка *n* находилась бы въ большемъ разстояніи нежели *m*, что быть не можетъ. И такъ всѣ точки верхней дуги должны совпадать съ точками нижней, и посему дуги должны быть равны. А какъ онѣ обѣ, вмѣстѣ взятыя, составляютъ цѣлую окружность, то каждая изъ нихъ равняется половинѣ окружности, и по сей причинѣ называется полуокружностью.

128. Изъ того же свойства окружности слѣдуетъ, что *въ одномъ кругѣ, или двухъ равныхъ кругахъ, равныя дуги стягиваются равными хордами, и на оборотъ.*

Пусть (черт. 72) радіусъ AC=EO, и ◡AD=◡EG. Такъ какъ радіусы равны, то кругъ ADH совмѣстится съ кругомъ E*m*G, если центры совпадаютъ. Если притомъ первый кругъ наложенъ на другой такъ, чтобы и A совмѣщалась съ E, то дуга AD совпадетъ съ◡EG, по причинѣ ихъ равенства; и слѣд. точка D упадетъ въ G, а посему и хорда AD закроетъ совершенно хорду EG, потому что между двумя точками E и G только одну прямую провести можно.

Обратно, *если при равныхъ радіусахъ хорды равны, то стягиваемыя ими дуги равны.*

Пусть (черт. 72) хорда AD=хордѣ EG. По условію AC=EO, DC=OG, AD=EG: слѣд. △ ACD=△EOG; а изъ сего равенства слѣдуетъ, что и уголъ ACD=∠O. И такъ, если кругъ ADH положимъ на кругъ E*m*G такъ, чтобы радіусъ AC совмѣстился съ радіусомъ EO, то по равенству угловъ ACD и O радіусъ CD закроетъ OG, и точка D упадетъ въ G. Если же двѣ крайнія точки дуги AD совпадаютъ съ крайними точками дуги EG, то и самыя дуги (§ 127) совпадаютъ, по сему равны.

Слѣдствіе. Если хорды равны, то стягиваемыя дуги равны, и углы при центрѣ, составленные радіусами, проведенными чрезъ крайнія точки дуги, также равны.

129. *Въ одномъ и томъ же, или въ двухъ равныхъ кругахъ, большая дуга (если только дуги менѣе полуокружности) стягивается большею хордою.*

Пусть (черт. 72) радіусъ AC=EO и◡A*n*H>◡E*m*G. Отложимъ на большей дугѣ A*n*H дугѣ A*n*D=◡E*m*G, то хорда AD=EG. Проведя радіусы CD и CH, составимъ два треугольника ACD и ACH, въ которыхъ находится по двѣ равныхъ сторонк, и ∠ACH, составленный прямыми AC и CH, болѣе ∠ACD, составленнаго прямыми AC и CD(§68); слѣд. третья сторона AH болѣе третьей стороны AD равнойGE; и такъ и проч.

130 Обратно: если положимъ, что хорда AH>EG, то въ такомъ случаѣ (§ 69) изъ тѣхъ же треугольниковъ ACD и ACH будетъ слѣдовать, что ∠ACH болѣе ∠ACD, а посему чрезъ наложеніе докажемъ, что◡AH болѣе◡AD или равной ей◡EG.

Примѣчаніе. Мы полагали, что дуги, которыя были сравниваемы, менѣе полуокружности. Если бы были взяты дуги болѣе полуокружности, то въ такомъ случаѣ хорды уменьшились бы съ увеличеніемъ дугъ и обратно.

Хорда всегда должна быть менѣе діаметра, хотя дуга и сдѣлалась бы болѣе окружности. И въ самомъ дѣлѣ всегда изъ данной хорды AB (черт. 73) и радіусовъ AC и CB, проведенныхъ чрезъ ея конечныя точки, можно составить треугольникъ ACB, въ которомъ сумма двухъ сторонъ AC и CB болѣе хорды AB; но AC+CB равны діаметру; слѣд. діаметръ болѣе всякой хорды AB.

131. *Радіусъ* CD (черт. 73) *проведенный перпендикулярно къ хордѣ* AB *дѣлитъ хорду и стягиваемую ею дугу* ADB *пополамъ.*

I. AC=CB, CE общая, ∠AEC=BEC какъ прямые, слѣд. (§ 71) △ AEC=△ CEB; изъ равенства же треугольниковъ слѣдуетъ, что AE=EB; т. е. въ точкѣ E дѣлится хорда AB пополамъ.

II. Изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ слѣдуетъ также что ∠ACE =∠BCE; если же эти углы равны, то и◡AD=◡DB (§ 72). И такъ радіусъ CD дѣлитъ и◡ADB въ точкѣ D пополамъ.

Примѣчаніе. Центръ C, средина E хорды AB и средина D дуги, стягиваемой хордою AB, суть три точки лежащія на одной прямой, перпендикулярной къ хордѣ. Но какъ двухъ точекъ достаточно для опредѣленія положенія прямой, то изъ того и слѣдуетъ, что всякая прямая,

проходящая чрезъ двѣ изъ означенныхъ точекъ, проходитъ непремѣнно и чрезъ третью и будетъ перпендикулярна къ хордѣ.

132. Обратно: *перпендикуляръ* EG, *возстановленный къ хордѣ* AB *изъ ея средины* E, *проходитъ чрезъ центръ* C.

Всѣ точки перпендикуляра GE находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ A и B (§ 45), но и центръ круга находится также въ равныхъ разстояніяхъ отъ тѣхъ же точекъ, слѣд. центръ долженъ быть на прямой CE, и GC продолженная до окружности, будетъ діаметромъ.

133. Изъ послѣдняго предложенія выводится весьма простой *способъ находить центръ круга*: стоитъ только провести какую нибудь хорду AB (черт. 73), изъ средины ея возставить перпендикуляръ ED, продолжить его до окружности, и раздѣлить пополамъ. Средина C будетъ искомый центръ.

134. На этомъ же предложеніи основано рѣшеніе задачи: *чрезъ данныя три точки, нележащія на оной прямой, описать окружность.*

Пусть будетъ (черт. 74) A, B, G данныя точки. Положимъ, что задача рѣшена, и что ABG будетъ искомая окружность; въ такомъ случаѣ прямыя AB и BG, соединяющія данныя точки, были бы хордами искомой окружности, и посему центръ долженъ находиться какъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ средины E хорды AB, такъ и на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ средины D хорды BG; слѣд. долженъ быть въ точкѣ ихъ пересѣченія O.

Повѣрка. AO равна BO, какъ наклонныя (§ 45) равноудаляющіяся отъ основанія перпендикуляра; по той же причинѣ BO=CO; слѣд. точка O находится въ равномъ разстояніи отъ точекъ A, B и C, посему если изъ точки O опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ AO, то она пройдетъ чрезъ данныя три точки.

135. И такъ чрезъ данныя три точки, не лежащія на одной прямой, всегда можно описать окружность; докажемъ теперь, что можно описать только *одну* окружность.

Положимъ, что проходитъ чрезъ данныя три точки A, B, G еще другая окружность. Центръ ея долженъ быть на перпендикулярѣ EO, возстановленномъ изъ средины хорды AB, потому что въ противномъ случаѣ онъ бы находился не въ равномъ разстояніи отъ данныхъ точекъ A и B. Также не трудно убѣдиться въ томъ, что центръ второй, предполагаемой окружности, проходящей чрезъ B и G находился бы на перпендикулярѣ DO, возставленномъ изъ средины хорды BG; и такъ центръ второй окружности находился бы на двухъ перпендикулярахъ EO и OD. Но двѣ прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, слѣд. вторая предполагаемая окружность имѣла бы тотъ же центръ, и посему обѣ окружности, имѣя общій центръ и одинакіе радіусы, совмѣстились бы.

136. И такъ двѣ окружности не могутъ имѣть трехъ общихъ точекъ, не совмѣщаясь совершенно; а посемуд вѣ окружности могутъ пересѣкаться только въ двухъ точкахъ.

137. *Двѣ равныя хорды находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра; а изъ двухъ неравныхъ хордъ меньшая далѣе отстоитъ отъ центра.*

I. Пусть (черт. 75) хорда AB=DE. Перпендикуляры CG, CF изъ центра C, проведенные къ даннымъ хордамъ, означаютъ ихъ разстоянія отъ центра. Соединивъ центръ C съ A и D прямыми CA и CD, составимъ два равныхъ прямоугольныхъ треугольника ACG и CDF (§ 71), потому что CA=CD, какъ радіусы, и AG=DF, какъ половины равныхъ хордъ. Изъ равенства же треугольниковъ слѣдуетъ, что CG=CF.

II. Положимъ что AB<DH; изъ этого условія (§ 130) слѣдуетъ, что и ⌣AnB <⌣DEH. Посему на дугѣ DEH можно отложить дугу DE равную дугѣ AnB. Проведя хорду DE, опустимъ на нее изъ центра перпендикуляръ CI, для опредѣленія разстоянія хордъ отъ центра.

CF>CK (§ 8 акс. I), а CK>CI (§ 44);
слѣд. CF>CI;
но CF=CG,
слѣд. CG>CI,

то есть, изъ двухъ не равныхъ хордъ меньшая AB далѣе отстоитъ отъ центра нежели бо́льшая.

138. Продолженная хорда AB (черт, 76), пересѣкающая окружность въ двухъ точкахъ, называется *сѣкущею.* Если представимъ себѣ, что сѣкущая AD движется около одной точки пересѣченія A такъ, что будетъ удаляться отъ центра, то разстояніе между точками пересѣченія будетъ уменьшаться, потому что тѣмъ менѣе хорда, составляющая часть всей сѣкущей, чѣмъ далѣе отстоитъ отъ центра. Если вообразимъ, что при дальнѣйшемъ движеніи разстояніе между A и B совершенно уничтожится, тогда обѣ точки совпадутъ, и сѣкущая AD не будетъ уже въ точномъ смыслѣ пересѣкать окружность, а только касаться ея въ одной точкѣ A. И тогда она называется *касательною.*

139. *Перпендикуляръ* AB (черт. 77), *возставленный къ радіусу* CA, *въ конечной точкѣ* A, *есть касательная къ окружности.*

Въ самомъ дѣлѣ, всякая точка E, взятая на прямой AB, находятся внѣ окружности, потому что CE, какъ наклонная, длиннѣе перпендикуляра AC, и слѣд. точка E далѣе отстоитъ отъ центра нежели A, которая лежитъ на окружности. Если же всякая точка E находится внѣ окружности, то очевидно, что AB, имѣя только одну точку общую съ окружностью, будетъ касательною.

140. И такъ, чтобы *провести касательную, къ окружности чрезъ данную точку* А слѣдуетъ только данную точку А соединить съ центромъ С, и къ радіусу возставить перпендикуляръ, который и будетъ требуемая касательная. Какимъ образомъ проводится перпендикуляръ, будетъ ниже показано (§ 181).

141. *Къ данной окружности чрезъ данную точку* А *можно провести только одну касательную* АВ (черт. 78).

Положимъ, что сверхъ АВ можно провести другую прямую АG, которая касалась бы окружности. АС перпендикулярна къ АВ, слѣд. къ АG будетъ наклонна, посему изъ С можно опустить на АG перпендикуляръ СЕ, который будетъ короче АС, и слѣд. точка Е будетъ менѣе отстоять отъ С нежели А. Но А находится на окружности, слѣд. Е находилась бы внутри окружности. И такъ предполагаемая касательная АG входила бы внутрь окружности, и была бы сѣкущею.

142. Слѣдствіе. Касательная АВ должна быть перпендикулярна къ радіусу, проведенному черезъ точку касанія. Если бы АВ не была перпендикулярна къ радіусу АС то изъ точки А можно бы было провести другую линію, перпендикулярную къ АС, которая по § 139 была бы касательною къ кругу; слѣд. были бы двѣ касательныя, проведенныя къ окружности чрезъ одну и ту же точку А. Но какъ сего допустить не можно, то посему касательная не можетъ не быть перпендикулярною къ радіусу АС.

143. *Между двумя параллельными прямыми лежащія дуги равны.*

Здѣсь могутъ быть три случая:

I. Когда данныя прямыя суть хорды или сѣкущія; напр. АВ и DЕ (черт. 79).

Изъ центра С опустимъ перпендикуляръ СF ня хорду DЕ, то эта же прямая также перпендикулярна къ АВ (§ 90); и посему, если будетъ продолжена до пересѣченія съ окружностью, раздѣлитъ въ точкѣ Н, какъ дугу DНЕ, такъ и дугу АНВ, на двѣ равныя части, то есть.

$$\smile DAH = \smile EBH$$
$$\text{и} \smile AH = \smile HB$$
$$\text{слѣд.} \smile DAH - \smile AH = \smile EBH - \smile HB.$$
$$\text{или} \smile DA = \smile EB.$$

144. II. Одна изъ данныхъ прямыхъ можетъ быть хордою DЕ, а другая касательною КL.

Изъ точки касанія Н проведемъ радіусъ СН, то онъ будетъ (§ 139) перпендикуляръ къ касательной КL, а посему и къ параллельной ей хордѣ DЕ (§ 90); а изъ этаго слѣдуетъ, что $\smile DHE$ раздѣлится въ Н на двѣ равныя части DН и НЕ, то есть

$$\smile DH = \smile HE.$$

145. III. Обѣ данныя параллельныя прямыя могутъ быть касательными КL и МN.

Проведя хорду DЕ параллельно къ касательной КL, слѣд. и къ касательной МN (§ 99), получимъ по § 131

$$\smile DH = \smile HE$$
$$\text{и} \smile DI = \smile IE$$
$$\text{слѣд,} \smile DH + \smile DI = \smile HE + \smile IE$$
$$\text{или} \smile HDI = \smile HEI.$$

А какъ обѣ вмѣстѣ составляютъ цѣлую окружность, то каждая изъ нихъ равна полуокружности.

II Объ углахъ, вписанныхъ въ кругѣ.

146. Въ кругѣ проводимыя прямыя могутъ пересѣкаться какъ внутри такъ и внѣ его, и посему составляютъ различные углы по ихъ положенію. Такъ напримѣръ двѣ хорды, или двѣ сѣкущія могутъ пересѣкаться въ центрѣ и составлять уголъ, коего вершина въ центрѣ, или встрѣчаются на окружности и въ такомъ случаѣ уголъ, ими составляемый, называется угломъ *вписаннымъ*. Также могутъ быть составлены углы, коихъ вершины находятся внѣ круга или внутри его, между центромъ и окружностію. Разсмотримъ, чѣмъ измѣряются таковые углы.

147. Въ § 39 объяснено, что уголъ измѣряется дугою, заключающеюся между его боками, и описанною изъ его вершины произвольнымъ радіусомъ. И такъ мѣра угла АСВ (чеот. 80) будетъ дуга А*n*В потому что дуга А*n*В заключается между сторонами его АС и ВС, и описана радіусомъ АС.

148- Положимъ теперь, что уголъ составленъ двумя хордами, встрѣчающимися на окружности, и найдемъ, въ какомъ отношеніи онъ находится къ углу, имѣющему вершину въ центрѣ, и заключающему между своими сторонами туже самую дугу.

Здѣсь могутъ быть три случая:

149. I. Когда (черт. 81) одна сторона DВ даннаго угла АDВ проходитъ чрезъ центръ С.

$$\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA \ (\S\ 104)$$
$$\text{но } \angle CAD = \angle CDA \ (\S\ 60);$$
$$\text{слѣр.} \angle ACB = 2\angle CDA$$
$$\text{и посему} \angle CDA = \tfrac{1}{2}\angle ACB = \tfrac{1}{2}\smile AnB.$$

150. II. Когда (черт. 82) центръ С находится между сторонами АD и DВ даннаго угла АDВ.

Проведя діаметръ DЕ. будемъ имѣть:

$$\angle ACE = 2\angle ADE \ (\S\ 149)$$
$$\angle BCE = 2\angle BDE$$
$$\text{слѣд. } \angle ACE + \angle BCE = 2\angle ADE + 2\angle BDE = 2(\angle ADE + \angle BDE).$$
$$\text{или } \angle ACB = 2\angle ADB$$
$$\text{и посему } \angle ADB = \tfrac{1}{2}\angle ACB = \tfrac{1}{2}\smile AEB.$$

151. III. Когда центръ С (черт. 83) лежитъ внѣ сторонъ угла ADB. Проведя діаметръ DE и радіусы AC и BC, получимъ:

$$\angle ACE = 2\angle ADE \text{ (§ 49)},$$
$$\angle BCE = 2\angle BDE$$

слѣд.
$$\angle ACE - \angle BCE = 2(\angle ADE - \angle BDE)$$
или $\angle ACB = 2\angle ADB$;
слѣд. $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\smile AB$.

И такъ во всѣхъ трехъ случаяхъ было выведено, что *уголъ* ADB, *имѣющій вершину на окружности, измѣряется половиной дуги, заключающейся между его сторонами.*

152 Слѣдствіе 1. Всѣ углы (черт. 85) ABE, ACE, ADE... вписанные въ кругѣ, и построенные на одной и той же дугѣ A*n*E, равны между собою, потому что имѣютъ одну и туже мѣру, и именно, половину дуги A*n*E.

153. Слѣдствіе 2. Всѣ вписанные углы ADB, ACB (черт. 86), стоящіе въ концахъ діаметра, должны быть прямые, потому что измѣряются половиною дуги A*m*B, то есть половиною полуокружности, или четвертью окружности (§ 149),

154. На послѣднемъ параграфѣ основано рѣшеніе слѣдующей задачи: *Къ данной прямой* DE (черт. 84) *возставить перпендикуляръ изъ ея конечной точки* D. Для сего нужно только изъ произвольной точки С описать окружность такъ чтобы она проходила чрезъ данную точку D и пересѣкала бы данную прямую DE еще въ какой нибудь точкѣ А. Проведя чрезъ А діаметръ, слѣдуетъ только точку пересѣченіе В соединить съ данною точкою D прямою BD, которая и будетъ требуемый перпендикуляръ, потому что $\angle ADB$, по § 153, есть уголъ прямой,

155 Чтобъ опредѣлить мѣру угла DAC (черт. 87), составленнаго двумя, внутри круга пересѣкающимися, прямыми AB и EC, стоитъ только провести хорду AE и тогда получимъ;

$$\angle ADB = \angle DAE + \angle AED \text{ (§ 104)},$$
$$= \frac{1}{2}\smile EB + \frac{1}{2}\smile AC \text{ (§ 151)},$$

то есть *мѣра угла, имѣющаго вершину между центромъ и окружностію, есть полусумма дугъ заключающихся между его сторонами и ихъ продолженіями.*

156. Чтобы найти мѣру угла ABC (черт. 88), составленнаго двумя, внѣ круга пересѣкающимися, прямыми AB и BC, проведемъ хорду AE, и тогда будемъ имѣть;

$$\angle ABC = AEC - \angle EAB \text{ (§ 104)}$$
$$= \frac{1}{2}\smile AC - \frac{1}{2}\smile DE,$$

то есть *уголъ, составленный двумя прямыми, пересѣкающимися внѣ окружности, имѣетъ мѣрою полуразность дугъ, заключающихся между его сторонами.*

157. Если мы себѣ представимъ, что (черт. 69) сѣкущая AD будетъ обращаться около точки D, и если въ то же время она удаляется отъ BD, то $\angle BDA$ увеличится, а вмѣстѣ съ нимъ и дуга BF, и впродолженіи всего предполагаемаго движенія, BF (§ 151) будетъ служить мѣрою углу BDA. Если наконецъ сѣкущая сдѣлается касательною, то въ тоже время дуга BF сдѣлается дугою BFD, *и посему мѣра угла* BDG, *составленнаго хордою* BD, *и касательною* DG, *измѣрястся половиною дуги стягиваемой хордою.*

Въ этомъ можно удостовѣриться еще другимъ способомъ: для сего проведемъ чрезъ точку касанія D діаметръ DE, тогда уголъ GDE (§ 142) будетъ прямой, а посему измѣряется четвертью окружности, или половинною полуокружности; слѣд.

данный $\angle GDB = \angle GDF - \angle BDE$
$$= \frac{1}{2}\smile EBD - \frac{1}{2}\smile BE$$
$$= \frac{1}{2}(\smile EBD - \smile BE)$$
$$= \frac{1}{2}\smile BFD,$$

III. О прямолинейныхъ фигурахъ, вписанныхъ въ кругѣ, и описанныхъ около него.

158. Всякая прямолинейная фигура, которой вершины угловъ лежатъ на окружности, называется *вписанною* въ кругѣ; если же всѣ ея стороны касаются окружности одною точкою, то таковая фигура называется *описанною.*

159. Очевидно, что весьма легко вписывать прямолинейныя фигуры въ кругѣ, если не сдѣлано никакихъ особыхъ условій. Напримѣръ, чтобы въ кругѣ вписать треугольникъ, стоитъ только взять какія нибудь три точки А, В и С (черт. 90) на окружности, и соединить ихъ прямыми AB, BC, CA, которыя и составятъ требуемый треугольникъ ABC, потому что вершины его будутъ лежать на окружности. Если же чрезъ данныя три точки на окружности проведемъ касательныя DF, FE, ED, до взаимнаго пересѣченія, то и составится описанный треугольникъ DFE. Такимъ же образомъ вписывается и описывается всякій многоугольникъ, если не сдѣлано особенныхъ условій, опредѣляющихъ его форму.

160. Обратныя задачи уже не такъ просты, и, какъ мы увидимъ, не всегда возможны, то есть не около всякаго многоугольника можно описать или вписать въ немъ окружность.

Такъ какъ чрезъ данныя три точки, нележащія на одной прямой, всегда можно описать окружность, то изъ того и слѣдуетъ, что *и около всякаго треугольника можно описать окружность*, потому что вершины его трехъ угловъ не находятся на одной прямой, и посему способъ изложенный въ § 134, можетъ быть примѣненъ къ рѣшенію этой задачи.

161. Положимъ теперь, что требуется *въ данномъ треугольникѣ вписать кругъ.*

Пусть (черт. 91) будетъ ABC данный треугольникъ, и пусть задача уже рѣшена, то есть примемъ, что O есть центръ искомаго круга, а FED искомая окружность и F, D, E, точки касанія. Соединимъ ихъ съ центромъ O прямыми OD, OE, OF. Прямыя OD, OE, OF, (по § 142 были бы перпендикулярны къ AB, CB и AC. Изъ перпендикулярности и равенства прямыхъ OD, OF, OE, (§ 71), по соединенія центра O съ A и B прямыми OA и OB, слѣдовало бы равенство треугольниковъ OAF и OAD, ODB и OBE; а изъ этихъ двухъ равенствъ можно бы было вывести что $\angle n = \angle m$, и $\angle p = \angle q$ то есть *прямыя AO и OB, въ пересѣченіи которыхъ находится центръ искомаго круга, раздѣляютъ два угла даннаго треугольника на двѣ равныя части.*

Повѣримъ это. Пусть AO и BO дѣлятъ углы A и B пополамъ; то есть $\angle n = \angle m$, $\angle p = \angle q$. Изъ точки пересѣченія O проведемъ прямыя OD, OF, OE перпендикулярно къ сторонамъ даннаго $\triangle$ ABC; тогда получимъ, что (§ 70) $\triangle$ AOD $= \triangle$ AOF, а $\triangle$ OBD $= \triangle$ OBE. Изъ равенства же треугольниковъ слѣдуетъ, что OF $=$ OD, и OD $=$ OE, то есть OF $=$ OD $=$ OE. И такъ, если одну ножку циркуля поставимъ въ O, и опишемъ кругъ радіусомъ, равнымъ OF, то окружность пройдетъ чрезъ точки D, F, E; и какъ (§ 139) радіусы OD, OF, OE перпендикулярны къ AB, AC и BC, то посему послѣднія прямыя будутъ касательныя; слѣд. $\triangle$ ABC будетъ описанный.

162. Такъ какъ три точки совершенно опредѣляютъ положеніе окружности, то изъ этого и явствуетъ, что не около каждаго многоугольника всегда можно описать кругъ. Чрезъ данныя три вершины даннаго многоугольника всегда можно описать окружность; но будетъ ли она проходить чрезъ остальныя вершины, это зависитъ отъ ихъ положенія.

Также очевидно, что не во всякомъ многоугольникѣ можно вписать окружность. Мы тотчасъ увидимъ, что правильные многоугольники составляютъ исключеніе, то есть какъ около нихъ всегда можно описать кругъ, такъ и вписать въ нихъ.

163. *Около всякаго правильнаго многоугольника можно описать кругъ.*

Пусть будетъ ABCDE (черт. 92) данный правильный многоугольникъ и точка O центръ окружности, проходящей чрезъ A, B, C (§ 134); требуется доказать, что эта окружность пройдетъ и чрезъ остальныя вершины D, E.... то есть, что эти точки находятся отъ центра O въ такомъ же разстояніи какъ и A, B, C. Для сего отъ O опустимъ перпендикуляръ OF на сторону BC, и проведемъ радіусы AO и OD. Потомъ представимъ себѣ, что четыреугольникъ AOFB наложенъ на четыреугольникъ OFCD такъ, чтобы OF осталась на своемъ мѣстѣ, то по причинѣ равенства прямыхъ угловъ OFB и OFC, FB упадаетъ на FC, и по равенству ее совершенно закроетъ, то есть B совпадетъ съ C. По равенству угловъ B и C сторона AB упадетъ на CD и, по причинѣ ихъ равенства, точка A совмѣстится съ D, и посему AO совпадетъ съ OD (§ 11) и слѣд. ей будетъ равна. Точно также докажемъ, что и остальныя точки E.. въ такомъ же разстояніи отъ O какъ и точка A. И такъ окружность пройдетъ чрезъ всѣ вершины угловъ, слѣд. будетъ описана около многоугольника.

164. Очевидно, что всѣ стороны правильнаго многоугольника ABCD (черт. 93), вписаннаго въ кругѣ, разсматриваемыя какъ его хорды, находятся въ равномъ разстояніи отъ центра, по причинѣ ихъ равенства (§ 137). Изъ этого слѣдуетъ, что кругъ, описанный изъ того же центра радіусомъ, равнымъ разстоянію OF, будетъ касаться средины (§ 137) каждой стороны; и какъ каждая сторона, какъ перпендикулярная къ радіусу, будетъ вмѣстѣ и касательною, то кругъ FGH будетъ вписанный (черт. 93).

Примѣчаніе. Около правильнаго многоугольника описанный кругъ и въ немъ вписанный имѣютъ общій центръ. Радіусъ круга вписаннаго также называется *апоѳемою* многоугольника.

165. *Если правильный многоугольникъ какого нибудь числа сторонъ вписанъ въ кругъ, то можно и описать того же числа сторонъ правильный многоугольникъ.*

Пусть будетъ $a\ b\ c\ d\ e\ f$ (черт. 94) правильный многоугольникъ, вписанный въ кругѣ. Проведя радіусы Oa, Ob, Oc..... возставимъ въ точкахъ a, b, c..... перпендикуляры къ нимъ FA, AB, BC....., которые (§ 139) будутъ касательными къ окружности, и взаимнымъ своимъ пересѣченіемъ составятъ многоугольникъ того же числа сторонъ; остается еще доказать, что этотъ многоугольникъ также будетъ правильный.

Треугольники aAb, bBc, cCd и т. д. равны между собою (§ 58), потому что $ab = bc = cd$...., какъ стороны правильнаго многоугольника; углы же Aab, Bba, Bcb, Ccb, Cdc.... равны между собою потому, что измѣряются половиною равныхъ дугъ (§ 128 и § 157). Изъ равенства равнобедренныхъ треугольниковъ слѣдуетъ

1) Что aA $=$ Ab $=$ Bb $=$ Bc $=$ cC $=$ Cd.....; а изъ этого явствуетъ, что Ab $+$ bB $=$ Bc $+$ cC $=$ Cd $+$ dD....

или AB $=$ BC $=$ CD....

2) Изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ слѣдуетъ:

что $\angle a$A$b = \angle b$B$c = c$Cd....

И такъ многоугольникъ ABCDEF, имѣющій равныя стороны и равные углы, долженъ быть правильный.

166. Обратно: *если описанъ около круга правильный многоугольникъ,*

то по немъ можно вписать правильный же многоугольникъ то же числа сторонъ.

Пусть (черт. 94) ABCDEF данный, описанный около круга, правильный многоугольникъ. Соединивъ точки касанія a, b, c, d...., которыя суть средины сторонъ AF, AB, BC, CD...., какъ мы видѣли въ § 165, прямыми ab, bc, cd...., составимъ требуемый многоугольникъ $a\ b\ c\ d\ e\ f$. Треугольники aAb, bBc, cCd.., равны, потому что имѣютъ по двѣ равныя стороны, и сверхъ того углы, между ними заключающіеся, равны; а посему и третьи стороны, ab, bc, cd.... равны. Изъ равенства сторонъ ab, bc, cd.... слѣдуетъ равенство стягиваемыхъ дугъ ab, bc, cd.... а посему и углы abc, bcd, cde...., какъ имѣющіе вершины свои при окружности, измѣряющіеся одинакимъ числомъ равныхъ дугъ, равны. И такъ многоугольникъ $abcdef$, имѣющій стороны и углы равные, будетъ правильный и столькихъ же сторонъ, какъ и описанный.

167. Изъ § 165 слѣдуетъ, что для описыванія правильныхъ многоугольниковъ около круга нужно только знать способъ ихъ вписыванія. Разсмотримъ сперва какимъ образомъ эта задача рѣшается въ отношеніи нѣкоторыхъ многоугольниковъ, и начнемъ съ самаго простѣйшаго примѣра.

Вписать въ данномъ кругѣ правильный шестиугольникъ.

Положимъ, что правильный (черт. 96) шестиугольникъ ABCDEF вписанъ; въ такомъ случаѣ дуги AB, BC, CD..., должны быть равны между собою, потому что стягиваются равными хордами, и посему каждая изъ нихъ равна $1/6$ окружности, такъ какъ всѣ вмѣстѣ составляютъ цѣлую окружность. Если же дуга AB равна $1/6$ окружности, то и уголъ при центрѣ AOB, составленный радіусами, проходящими чрезъ конечныя точки дуги, равенъ $1/6$ четырехъ прямыхъ, или $2/3$ прямаго. Для угловъ OAB и OBA останется $4/3$ d, и какъ они равны между собою (§ ...) то каждый изъ нихъ равенъ $2/3$ d; слѣд. въ треугольникѣ AOB всѣ три угла должны быть равны, а посему и стороны также равны, то есть AB=AO. И такъ *сторона правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, равна радіусу*; слѣд., чтобъ вписать требуемый многоугольникъ, должно только на окружности отлагать хорды, равны радіусу.

Соединивъ хордами AC, CE, AE концы дугъ ABC, CDE и EFA, изъ коихъ каждая равна двойной дугѣ AB, построимъ равносторонній треугольникъ, потому что стороны его равны какъ хорды, стягивающія равныя дуги. И такъ, чтобы *вписать въ кругъ равносторонній треугольникъ*, стоитъ только на окружности отложить хорды AB, BC, CD равныя радіусу, и потомъ провести прямыя AC, CE, AE, соединяющія концы двухъ прилежащихъ хордъ.

168. Рѣшимъ еще одну задачу: *вписать въ кругъ правильный четыреугольникъ, то есть квадратъ* (черт. 97).

Положимъ, что четыреугольникъ ABCD есть требуемый квадратъ. Въ такомъ случаѣ хорды AD, BC, CD, DA должны быть равны, а посему и углы при центрѣ a, b, c, d, также равны; но какъ сумма ихъ равна $4d$, то каждый изъ нихъ равенъ прямому; а посему діаметры AC и BD, проходящіе чрезъ точки A, C, B, D, взаимно перпендикулярны. Изъ сего же слѣдуетъ, что стоитъ только провести два взаимно перпендикулярныхъ діаметра AC и BD, и соединить точки пересѣченія съ окружностію A, B, C, D прямыми AB, BC, CD, DA, которыя и составятъ требуемый квадратъ.

Повѣрка. Хорды AB, BC, CD, DA равны, потому что противолежатъ равнымъ угламъ при центрѣ. Углы же DAB, ABC, BCD, CDA равны, потому что всѣ измѣряются половиною полуокружности. И такъ въ четыреугольникѣ ABCD всѣ стороны и всѣ углы равны.

169. Рѣшенія задачъ, предложенныхъ въ §§ 167 и 168, ведутъ къ рѣшенію слѣдующаго общаго вопроса: *вписать въ кругъ правильный многоугольникъ произвольнаго числа сторонъ.*

Въ § 167 было уже объяснено, что дуги, стягиваемыя сторонами правильнаго шестиугольника и равносторонняго треугольника, составляютъ точно такую часть цѣлой окружности, сколько сторонъ въ вписываемой правильной фигурѣ; изъ этого явствуетъ, что для вписыванія какого-либо правильнаго многоугольника въ кругѣ, стоитъ только окружность раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько въ немъ предполагается сторонъ, и потомъ соединить точки дѣленія прямыми линіями. Въ самомъ дѣлѣ, пусть окружность даннаго круга (черт. 106) раздѣлена на n равныхъ частей въ точкахъ A, B, E, D...., и точки дѣленія соединены прямыми AB, BE, ED...,, то, I. всѣ эти прямыя равны между собою, потому что могутъ быть приняты за хорды, стягивающія равныя дуги, и II. всѣ внутренніе углы, такимъ образомъ построеннаго многоугольника ABED...., равны между собою, такъ какъ они измѣряются, какъ изъ чертежа явствуетъ, равными дугами. Изъ сего же слѣдуетъ, что многоугольникъ ABED...., долженъ быть правильнымъ, и имѣетъ n сторонъ.

Примѣчаніе. Если соединимъ прямыми линіями не послѣдовательныя точки дѣленія, но пропуская каждый разъ по одной или двѣ и т. д. точекъ, то проведенными прямыми составятся особаго рода многоугольники, получающіе названіе правильныхъ многоугольниковъ 2-го, 3-го.... порядка, или *звѣздообразныхъ многоугольниковъ.* Положимъ, что окружность (черт. 107) раздѣлена на 7 равныхъ частей въ точкахъ A, B, C, D... и точка A соединена прямою не съ B, а съ C, точка B не съ C, а съ D и т. д., то составится многоуг. $AbBcCdD$..., имѣющій 7 внутреннихъ

равныхъ угловъ A, B, C... и 7 входящихъ, также равныхъ угловъ AbB, BcC, CdD..., въ чемъ легко убѣдиться изъ самаго чертежа; также не трудно доказать что многоугольникъ $abcde$... правильный, и имѣетъ столько сторонъ, на сколько равныхъ частей раздѣлена окружность. Сверхъ сего изъ чертежа можно увѣриться, что правильный многоугольникъ 2-го порядка $AaBbCcDdEe$,... можетъ быть составленъ, если продолжимъ стороны правильнаго многоугольника $abcde$... до тѣхъ поръ, пока онѣ не пересѣкутся въ точкахъ A, B, C, D....

Соединяя (черт. 107′) точки дѣленія A, B, C, D.... прямыми, пропуская каждый разъ двѣ послѣдовательныя точки дѣленія, построимъ правильный многоугольникъ $Aa'B'b'C$... 3-го порядка.

Подобнымъ же образомъ строятся правильные многоугольники 4-го, 5-го и т. д. порядковъ; однакожъ притомъ надобно замѣтить, что число ихъ ограничено для каждаго многоугольника; напримѣръ, самый простѣйшій правильный звѣздообразный многоугольникъ есть пятиугольный; и правильныхъ звѣздообразныхъ пятиугольниковъ можетъ быть только одинъ (черт. 107‴). Тоже самое должно сказать и о правильныхъ звѣздообразныхъ шестиугольникахъ (черт. 107″), которые образуются двумя пересѣкающимися равносторонними треугольниками. Правильныхъ звѣздообразныхъ семиугольниковъ можетъ быть только 2 и т. д.

170. Задача. По данной сторонѣ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, вписать правильный многоугольникъ, имѣющій вдвое болѣе сторонъ.

Пусть ab (черт. 95) будетъ сторона какого нибудь правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, коего центръ въ O. Изъ O проведемъ къ хордѣ ab перпендикуляръ Oh, который раздѣлитъ хорду ab и соотвѣтствующую дугу на двѣ равныя части въ точкахъ h и c (§ 131). Такъ какъ дуга ac вдвое менѣе дуги acb, то и должна заключаться въ окружности вдвое болѣе разъ, нежели дуга acb; а посему и хорда ac можетъ быть отложена въ окружности также вдвое болѣе разъ нежели хорда ab. И такъ, отложивъ хорду ac на окружности, составимъ многоугольникъ, имѣющій вдвое болѣе равныхъ между собою сторонъ, нежели данный многоугольникъ. Осталось еще доказать, что и всѣ внутренніе его углы равны между собою. Положимъ что всѣхъ сторонъ въ многоугольникѣ $lkacb$... будетъ n, а посему и окружность будетъ раздѣлена на n дугъ, равныхъ $lk=ak=ac$... Внутренніе углы lka, kac, acb..., имѣющіе свои вершины на окружности и стоящіе на равныхъ дугахъ, потому что каждая изъ нихъ равна дугѣ kl, или дугѣ ac, взятой $(n-2$ раза), должны быть равны между собою. И такъ многоугольникъ $lkacb$... составленный не только изъ равныхъ сторонъ, но имѣющій всѣ углы равные, долженъ быть правильный.

171. Каждыя двѣ прилежащія стороны правильнаго многоугольника $lkacbp$...., lk и ka, болѣе одной стороны la правильнаго многоугольника $labm$, потому что двѣ стороны треугольника всегда болѣе третьей. Изъ этого же слѣдуетъ, что сумма всѣхъ сторонъ или периметръ многоугольника $lkacbp$.... болѣе периметра многоугольника $labm$.... И такъ *периметръ всякаго правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ менѣе периметра правильнаго многоугольника, вписаннаго въ томъ же кругѣ и имѣющаго вдвое болѣе сторонъ.*

172. Поступая какъ показано въ § 165, то есть проведя въ вершины угловъ даннаго правильнаго многоугольника $labm$.... радіусы Ol, Oa, Ob.... и возставивъ къ нимъ перпендикуляры rs, rg, gq...., построимъ правильный многоугольникъ $srgqt$...., описанный около круга, и имѣющій столько же сторонъ какъ и данный многоугольникъ $labmz$, Такимъ же образомъ, проведя перпендикуляры къ радіусамъ, проведеннымъ въ вершины угловъ многоугольника $lkacb$.... построимъ правильный многоугольникъ $yxude$..., который будетъ описанъ около круга и имѣетъ столько же сторонъ какъ и многоуг. $lkacb$.... и посему вдвое болѣе сторонъ нежели описанный многоугольникъ $sredt$.... Въ послѣднемъ многоугольникѣ прямыя ag и gb составляютъ вмѣстѣ одну сторону многоугольника, потому что каждая изъ нихъ равна половинѣ стороны многоугольника. Прямыя же ad, dc, ce, eb (такъ какъ каждая изъ нихъ равна половинѣ стороны многоуг. $yxude$....) всѣ четыре, вмѣстѣ взятыя, равны двумъ сторонамъ многоугольника. Но

$$dg+ge>de \text{ (§ 52)},$$

слѣд., и прибавимъ къ обоимъ членамъ неравенства ad и eb получимъ:

$$dg+ge+ad+eb>de+ad+eb$$

$$\text{или } ag+gb>ad+dc+ce+eb$$

то есть одна сторона описаннаго многоуг. $srygt$ болѣе двухъ сторонъ многоуг. $yxude$...., и такъ периметръ перваго многоугольника болѣе периметра втораго, потому что, хотя число сторонъ перваго вдвое *менѣе* числа сторонъ втораго, но каждая изъ сторонъ перваго *болѣе* двухъ сторонъ послѣдняго.

173. Изъ послѣднихъ параграфовъ слѣдуетъ, что периметры правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругѣ при удвоиваніи числа сторонъ, увеличиваются, между тѣмъ, какъ периметры описанныхъ многоугольниковъ, при тѣхъ же условіяхъ, уменьшаются.

174, При увеличиваніи числа сторонъ въ многоугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, самыя стороны уменьшаются, а вмѣстѣ съ тѣмъ разстоянія ихъ отъ центра, то есть апоѳемы, увеличиваются. Весьма легко убѣдить-

ся, что апоѳемы могутъ сдѣлаться почти равными радіусу, хотя онѣ никогда не достигнутъ этой величины. И въ самомъ дѣлѣ, во всякомъ треугольникѣ ahO (черт. 95)

$$aO<ah+hO$$

$$\text{и посему } aO-hO<ah$$

то есть разность между радіусомъ и апоѳемою менѣе половины стороны правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ. Но, удвоивая число сторонъ, мы можемъ представить себѣ въ кругѣ вписанный правильный многоугольникъ, коего стороны менѣе всякой линіи, какую только можно себѣ вообразить. Напримѣръ, пусть окружность круга равняется одному футу, и раздѣлена на 1.000.000.000 частей, то каждая дуга$=\frac{1}{1.000.000.000}$ фута, а соотвѣтствующая хорда, или сторона вписаннаго правильнаго многоугольника, будетъ еще меньше, а посему и разность между радіусомъ и апоѳемою, которая менѣе $^{1}/_{2}$ стороны, будетъ еще менѣе. Но ничто не препятствуетъ намъ предположить, что окружность раздѣлена на большее число равныхъ частей; слѣд. и разность между радіусомъ и апоѳемою можетъ быть сдѣлана менѣе, безъ всякаго ограниченія, и посему менѣе всякой произвольно-взятой величины.

175. *Если двѣ окружности пересѣкаются въ одной точкѣ, нележащей на прямой, соединяющей ихъ центры, то въ такомъ случаѣ онѣ должны пересѣчься еще въ одной точкѣ,*

Пусть окружность AME (черт. 98) пересѣкается недочерченною окружностью LNA въ точкѣ A. Соединивъ центры C и C′ прямою CC′, опустивъ на нее изъ A перпендикуляръ AD до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ B.

Прямоугольные треугольники ADC и BDC равны, потому что BC=AC, CD=CD (§ 70); изъ равенства треугольниковъ будетъ слѣдовать, что AD=DB.

Соединивъ A и B съ точкою C′ прямыми AC′ и BC′, получимъ также два равныхъ прямоугольныхъ треугольника ADC′ BCD′ (§ 57), потому что AD=DB, DC′=DC′, изъ равенства же треугольниковъ слѣдуетъ, что BC′=AC′, то есть, B въ такомъ же разстояніи отъ C′, въ какомъ находится и A. И такъ окружность, описанная изъ C′ радіусомъ=C′A, должна пройти и чрезъ другую точку B, находящуюся на окружности AME.

Примѣчаніе. Черт. 99 отличается отъ черт. 98 тѣмъ, что центръ второй окружности находится внутри первой; доказательство же остается совершенно тоже самое.

176. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что *если двѣ окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ* (черт. 98 и 99), *то прямая CC′, соединяющая центры окружностей, перпендикулярна къ хордѣ AB проведенной между точками пересѣченія и дѣлитъ ее пополамъ.*

И въ самомъ дѣлѣ, проведя радіусы AC, BC, AC′, BC′, получимъ два равныхъ треугольника ACC′, и BCC″ (§ 54), изъ этого равенства слѣдуетъ равенство угловъ ACC′ и BCC′. Но какъ сверхъ того въ треугольникахъ ACD и BCD, AC=BC, CD=CD, то и △ACD=△BCD. Изъ этого же равенства явствуетъ, что AD=DB, и ∠ADC=∠BDC, то есть прямая CD, или линія CC′ перпендикулярна къ AB, и дѣлитъ ее пополамъ.

177. Изъ черт. 98 и 99 явствуетъ, что въ случаѣ пересѣченія окружностей, всегда можетъ быть составленъ треугольникъ ACC′, коего одна вершина находится въ одной изъ точекъ пересѣченія, а остальныя двѣ вершины въ центрахъ данныхъ окружностей; или другими словами: можно составить треугольникъ ACC″, коего одна сторона CC′ равна разстоянію между центрами, а другія двѣ равны радіусамъ данныхъ окружностей. Для составленія же треугольника ACC′ необходимы слѣдующія два условія:

$$1.\ CC'<CA+C'A$$

$$\text{и } 2.\ CA<C'A+CC',$$

то есть 1) разстояніе между центрами менѣе суммы радіусовъ и 2) большій радіусъ менѣе суммы меньшаго радіуса съ разстояніемъ между центрами. И такъ *двѣ окружности пересѣкаются, если разстояніе между центрами менѣе суммы радіусовъ, и если сверхъ того, большій радіусъ менѣе суммы меньшаго радіуса съ разстояніемъ между центрами.*

178. *Если разстояніе CC′ (черт. 100) между центрами равно суммѣ радіусовъ CA и C′A, то окружности только касаются извнѣ.*

Очевидно, что окружности имѣютъ одну только общую точку A; потому что если бы онѣ имѣли еще вторую общую точку, то тогда, по § 117, разстояніе между центрами должно бы быть менѣе суммы радіусовъ.

179. *Если же разстояніе между центрами двухъ окружностей CC′ равно разности радіусовъ CA и C′A (черт. 101), то окружности только касаются внутри.*

Во первыхъ очевидно, что онѣ имѣютъ общую точку A; другой общей точки они имѣть не могутъ, потому что въ такомъ случаѣ большій радіусъ долженъ бы быть менѣе суммы меньшаго радіуса съ разстояніемъ между центрами, а здѣсь, по условію, онъ равенъ означенной суммѣ.

Слѣдствіе. Если двѣ окружности (черт. 100 и 101) касаются извнѣ или внутри, то центры и точка касанія находятся на одной прямой.

180. Прямая MN (черт. 100) перпендикулярная къ одному радіусу CA, перпендикулярна и къ другому C′A и CA находятся на одной прямой; слѣд. прямая MN есть касательная къ обѣимъ окружностямъ (§ 120) и по сему называется *общею касательною.*

181. Окружности, имѣющія общій центръ, но различные радіусы, называются *концентрическими,* напримѣръ (черт. 102), окружности ABC, DEF, GHI.

VI. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ предъидущимъ предложеніямъ.

182. *Изъ данной точки A, внѣ окружности, провести къ ней касательную.*

Пусть (черт. 103) AB будетъ требуемая касательная; въ такомъ случаѣ она перпендикулярна къ радіусу BC, и слѣд. если была бы проведена прямая AC, мы имѣли бы прямоугольный треугольникъ ABC. Изъ этого заключаемъ, что для рѣшенія задачи слѣдуетъ только на прямой AC, соединяющей данную точку съ центромъ, построить прямоугольникъ: для сего нужно на AC описать полуокружность CBA, и соединить точку пересѣченія B съ данной точкою A и центромъ C прямыми BA и BC.

Повѣрка. Описавъ полуокружность на AC, и соединивъ точку пересѣченія B съ данною точкою A, получимъ прямую, перпендикулярную къ радіусу BC въ точкѣ B (§ 153), и посему будетъ она касательная.

183. *Примѣчаніе.* Такъ какъ окружности KBB′ и ABB′ пересѣкаются въ двухъ точкахъ B и B′, то и по другую сторону діаметра будемъ имѣть такое же построеніе, и почему AB′ будетъ также касательная къ окружности, проведенная изъ данной точки A. Изъ равенства треугольниковъ ABC и AB′C (§ 71) слѣдуетъ, что обѣ касательныя AB и AB′ равны между собою.

184. *Начертить окружность проходящую чрезъ данную точку* B, *и касающуюся данной прямой* MN *въ точкѣ* A (черт. 104).

Положимъ, что окружность ABE есть требуемая, то въ такомъ случаѣ данная прямая MN касается окружности въ точкѣ A, а прямая AB, соединяющая точку касанія съ данной точкою, есть хорда. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что центръ требуемаго круга C долженъ находиться (§ 142 и § 132) въ точкѣ пересѣченія C перпендикуляра AF, возставленнаго изъ A къ MN, и перпендикуляра DF, возставленнаго къ хордѣ AB изъ ея средины D.

Въ самомъ дѣлѣ точки A и B должны находиться въ равномъ разстояніи отъ точки C, потому что AC=BC (§ 45); слѣд. если опишемъ окружность радіусомъ равнымъ AC, то она пройдетъ и чрезъ точку B. Кромѣ сего MN будетъ касаться окружности въ точкѣ A, потому что она перпендикулярна къ радіусу, проведенному чрезъ ту же точку.

185. *На данной прямой* AB *описать сегментъ* AFEBA (то есть отрѣзокъ круга, заключающійся между дугою и хордою) *вмѣщающій данный уголъ* a (черт. 105).

Положимъ, что задачу рѣшена, то есть что на данной прямой AB уже построенъ сегментъ AFEB, или ⌣AFEB, въ которой каждый вписанный уголъ AFB, AEB былъ бы равенъ данному углу a. Каждый изъ этихъ угловъ измѣряется половиною дуги AnB, но и уголъ BAN, если AN касательная, имѣетъ ту же мѣру. Изъ этого и выводится слѣдующее рѣшеніе: на данной прямой AB отложимъ уголъ BAN равный данному a, и потомъ опишемъ окружность такъ, чтобы она касалась прямой AN и проходила чрезъ точки A и B. Для сего стоитъ только возставить перпендикуляръ AG къ AN въ точкѣ A, и перпендикуляръ DH къ данной прямой AB изъ ея средины. Точка пересѣченія C будетъ центръ искомаго круга. И въ самомъ дѣлѣ:

$$\angle AFB \text{ и } \angle AEB = \tfrac{1}{2} \smile AnB \ (\S\ 150)$$
$$\angle a = \angle BAN = \tfrac{1}{2} \smile AnB \ (\S\ 157).$$
слѣд. $\angle AFB$ и $\angle AEB$ равны данному углу a.

186. *На данной прямой* AB *начертить правильный шестиугольникъ* (черт. 106).

Положимъ, что правильный шестиугольникъ уже начерченъ. Около него можно описать кругъ ABD, коего центръ пусть будетъ въ C. Проведя радіусы CA и CB, получили бы на AB равносторонній △ ABC (§ 167), коего вершина была бы въ центрѣ.

И такъ на AB слѣдуетъ построить равносторонній △ ABC и, принявъ вершины его за центръ, описать окружность въ которой и можно (§ 167) хорду AB отложить 6 разъ.

187. *На данной прямой* AB *построить правильный осьмиугольникъ* (черт. 108).

Чтобъ рѣшить эту задачу надобно описать такую окружность, чтобы прямая AB могла бы на ней быть отложена 8 разъ. Въ такомъ случаѣ уголъ при центрѣ, составленный двумя радіусами, проведенными чрезъ крайнія точки хорды AB, измѣрялся бы $^1/_8$ окружности, или былъ бы равенъ $^1/_8$ четырехъ прямыхъ, то есть $^1/_2$ прямаго угла. Углы CAB+CBA=$2d-{}^1/_2=1{}^1/_2d$; слѣд. каждый былъ бы равенъ $^3/_4d$. И такъ слѣдуетъ только въ точкахъ A и B отложить углы $^3/_4d$, и въ точкѣ пересѣченія C уголъ ACB будетъ равенъ $^1/_2d$, а самая точка C будетъ центръ требуемой окружности.

Построить углы равные $^1/_2d$ можно различнымъ образомъ. Слѣдующій способъ есть одинъ изъ простѣйшихъ.

Изъ средины E данной прямой AB возставляютъ перпендикуляръ EF, и отлагаютъ отъ E прямую ED равную AE, потомъ отъ D прямую DC, равную разстоянію AD, конечная точка C будетъ центръ требуемаго круга.

Чтобъ въ этомъ увѣриться проведемъ прямыя AD, DB, AC и BC. Прямоугольный треугольникъ ADE есть треугольникъ равнобедренный, и посему какъ ∠DAE такъ и ∠ADE=$^1/_2d$; по (§ 104) ∠ADE=∠DCA+DAC=2 ∠DCA, потому что по строенію DA=DC: и такъ:

$$2\ \angle DCA = {}^1/_2 d.$$
и посему $\angle DCA = {}^1/_4 d.$

Такимъ же образомъ можно доказать, что и $\angle DCB = {}^1/_4 d$; слѣд. $\angle ACB = \angle DCA + \angle DCB = {}^1/_2 d$. И посему дуга AEB $= {}^1/_8$ окружности; а изъ этого и слѣдуетъ, что хорда AB можетъ быть на ней отложена 8 разъ. Такимъ способомъ составленный многоугольникъ ABGH будетъ требуемый правильный осьмиугольникъ.

Глава III.

О ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ ЛИНІЯХЪ И ПОДОБНЫХЪ ФИГУРАХЪ.

I. Пропорціональныя линіи.

188. Въ предъидущихъ параграфахъ изслѣдованы были различныя свойства прямыхъ линій, прямолинейныхъ фигуръ и круга, отдѣльно: теперь перейдемъ къ ихъ сравненію, чтобъ найдти еще другія свойства, и изъискать способъ ихъ измѣренія.

Сравнивая между собою нѣсколько прямыхъ, мы встрѣчаемъ такія которыя имѣютъ одинаковыя отношенія. Если изъ четырехъ прямыхъ первая болѣе или менѣе второй въ n разъ, и третья также болѣе или менѣе четвертой въ n же разъ: то таковыя прямыя, составляющія геометрическую пропорцію, называются *пропорціональными*. Какъ чрезъ сравненіе всякихъ величинъ вообще пріобрѣтаемъ объ нихъ точнѣйшее понятіе, то посему на теорію пропорціональныхъ прямыхъ должно обращать особенное вниманіе.

189. *Если двѣ прямыя* NM *и* PQ (черт. 109) *раздѣлены нѣсколькими прямыми* AE, BF, CG, DH...., *проведенными изъ точекъ взятыхъ въ равныхъ разстояніяхъ на первой* NM, *то части второй* PQ, *между параллельными прямыми лежащія* EF, FG, GH...., *также будутъ равны между собою.*

Изъ точекъ E, F, G, H... проведемъ прямыя параллельныя къ прямой NM, и такимъ образомъ составимъ треугольники EIF, FKG, GLH, которые всѣ равны между собою. EI=AB (§ 100), AB=BC (по условію), а BC=FK (§ 100); слѣд. EI=FK. Такимъ же образомъ докажемъ, что EI=GL. Сверхъ сего.

$$\angle IEF = \angle KFG = \angle LGH \text{ (по § 63)},$$
$$\angle EIF = \angle FKG = \angle GLH \text{ (по § 103)},$$

И такъ въ треугольникахъ EIF, FKG, GLH (§ 58) стороны EI, FK, GL и прилежащіе къ нимъ углы равны; слѣд. они равны. Изъ сего же равенства слѣдуетъ, что и

$$EF = FG = GH... \text{ (§ 59)}$$

Слѣдствіе. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что EF содержится столько же разъ въ EU, сколько разъ AB въ AT; то есть:

$$EF : EU = AB : AT;$$

или переставивъ средніе члены пропорціи:

$$EF : AB = EU : AT.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$2\ FE : 2\ AB = EU : AT$$
$$3\ EF : 3\ AB = EU : AT.$$

то есть всякое число частей прямой EU относится къ такому же числу частей прямой AT какъ цѣлая прямая EU къ цѣлой прямой AT. Изъ этого прямо проистекаетъ слѣдующая теорема, которую мы подробнѣе разсмотримъ, по причинѣ ея важности.

190. *Три параллельныя прямыя* EF, GH, IK, (черт. 110) *раздѣляютъ двѣ прямыя* AB *и* CD *на части пропорціональныя*, то есть EG : GI=FH : HK.

Здѣсь могутъ быть два случая: части EG и GI могутъ быть *соизмѣримыми* и *несоизмѣримыми.*

1-й случай. Пусть EG и GI соизмѣримы, и пусть въ EG 7 такихъ частей, какихъ въ GI 2, то есть

$$EG : GI = 7 : 2 \ (1).$$

Представимъ себѣ, что EG раздѣлена на 7 частей, а GI на 2, и что изъ точекъ дѣленія проведены прямыя параллельныя къ которой нибудь изъ данныхъ прямыхъ EF, то по § 189, FH раздѣлится на 7 равныхъ частей, а HK на 2 такія же части; и слѣд.

$$FH : HK = 7 : 2 \ (2).$$

Но сумма членовъ перваго отношенія относится къ своему первому члену, такъ какъ сумма членовъ втораго отношенія къ своему первому (Ариѳм. § 130):

$$EG + GI : EG = FH + HK : FH$$
$$\text{или } EI : EG = FK : FH$$

И такъ вся прямая EI относится къ своей части EG такъ, какъ вся прямая FK относится къ части FH, лежащей между тѣми же параллельными прямыми.

191. 2-й случай. Положимъ теперь, что части EG и GI несоизмѣримы между собою и съ цѣлою прямою; и пусть въ такомъ случаѣ утверждаютъ, что EI относится къ EG не такъ какъ FK къ FH, но какъ FK къ линіи EL, меньшей нежели FH, то есть пусть

$$EI : EG = FK : EL \ (3)$$

Чтобъ это опровергнуть, представимъ себѣ, что прямая FK раздѣлена на такія равныя части, чтобы одна изъ точекъ дѣленія O упала между L и H, и тогда FO будетъ соизмѣрима съ FK. Проведя изъ O параллельную NO къ прямой EF или IK, получимъ по § 190,

EI : EN=FK : FO (4).

Сравнивая пропорціи (3) и (4) находимъ, что у нихъ предъидущіе члены равны; слѣд. изъ послѣдующихъ можно составить пропорцію:

EG : EN=EL : FO (5)

Но эта пропорція не можетъ имѣть мѣста, потому что EG не можетъ относиться къ линіи EN, которая *менѣе* ея, такъ какъ прямая EL къ прямой FO, которая ея *болѣе*. Пропорція (5) была слѣдствіемъ двухъ предшествовавшихъ пропорцій (3) и (4), изъ коихъ послѣдняя неоспоримо-справедлива, потому что основана на доказанныхъ теоремахъ, то изъ сего и слѣдуетъ, что погрѣшность непремѣнно заключается въ пропорціи (3), и именно въ предположеніи, что послѣдній членъ менѣе FH.

Точно такимъ же образомъ доказывается, что послѣдній членъ пропорціи (3) не можетъ быть болѣе FH, и посему онъ долженъ быть равенъ FH (акс. III § 9). И такъ

EI : EG=EK : EH;

а изъ этого слѣдуетъ:

EI—EG : EG=FK—FH : FH,

или GI : EG=KH : FH.

И такъ во всякомъ случаѣ, три параллельныя прямыя раздѣляютъ двѣ прямыя на части пропорціональныя, и соотвѣтствующія части этихъ прямыхъ относятся какъ самыя прямыя, то есть

EG : GI : EI=FH : HK : FK.

192. Слѣдствіе 1. Проведя (черт. 110) прямую FM || AB, составимъ треугольникъ EMK, въ которомъ прямая PH, параллельная къ MK, дѣлитъ стороны треугольника на части EP и PM, EH и HK.

Въ § 190 доказано, что

EG : GI=FH : HK

но EH=FP (§ 100), а GI=PM (§ 100);

слѣд. FP : PM=FH : HK

то есть *во всякомъ треугольникѣ прямая* PH, *параллельная къ какой нибудь сторонѣ* MK, *дѣлитъ прочія двѣ стороны на части пропорціональныя.*

193. Слѣдствіе 2. Изъ послѣдней пропорціи слѣдуетъ;

FP+PM : FP=FH+HK : FH

или FM : FP=EK : FH

также EM : PM=EK : HK,

то есть, если въ треугольникѣ проведется прямая параллельно къ какой нибудь сторонѣ, то не только, что стороны дѣлятся на части пропорціональныя, но и самыя стороны находятся въ такомъ же отношеніи, какъ соотвѣтсвенныя ихъ части.

194. Изъ этого предложенія ясно слѣдуетъ и обратное: *если прямая* PH

дѣлитъ двѣ стороны EM *и* FK, *треугольника* FMK *на части пропорціональныя, то она параллельна къ третьей сторонѣ* MK (черт. 111).

Если бы PH не была параллельна къ MK, то изъ точки P можнобъ было провести параллельную къ ней PQ. И тогда по § 193, имѣли бы:

FM : FP=FK : FQ,

но по условію, FM : FP=FK : FH;

слѣд., какъ первые три соотвѣтствующіе члена обѣихъ пропорцій равны, то и четвертые должны быть равны, то есть, FQ=FH. Но этаго быть не можетъ, потому что FQ есть часть FH; а посему и сдѣланное предположеніе, что не PH, а PQ параллельна къ MK, не можетъ имѣть мѣста.

Примѣчаніе. Изъ сдѣланнаго заключенія, что FQ=EH, можно тоже вывести и то, что точки Q и H должны совпадать. Если же эти точки совпадаютъ, то и прямыя PQ и PH совмѣщаются, то есть прямая, раздѣляющая двѣ стороны треугольника на части пропорціональная, и прямая параллельная къ третьей сторонѣ, есть одна и таже прямая.

195. Чтобы вывести въ какомъ отношеніи прямая PH (черт. 111), раздѣляющая двѣ стороны треугольника на части пропорціональныя, находится къ третьей сторонѣ MK, проведемъ прямую HN || FM, и тогда будемъ имѣть:

MN : MK=FH : FK (§ 193)

но MN=PH (100);

слѣд. PH : MK=FH : FK.

И такъ прямая PH находится къ третьей сторонѣ въ такомъ же отношеніи, въ какомъ и отсѣченная часть которой нибудь изъ сторонъ. считая отъ вершины треугольника. къ цѣлой сторонѣ.

196. *Къ даннымъ тремъ a, b и c найти четвертую пропорціональную* (черт. 112).

Для рѣшенія задачи построимъ произвольный уголъ MAN, и отложимъ на которой нибудь сторонѣ AM сперва прямую a, отъ A до B, потомъ отъ B до C прямую b; а на другой сторонѣ прямую c, отъ A до D. Соединивъ точку B и D прямою BD, и проведя CE || BD, получимъ искомую прямую DE, потому что (§ 192)

$a : b = c$: DE.

Если положимъ, что прямая $b=c$, тогда пропорція геометрическая была бы непрерывная, и прямая DE называлось бы третьею пропорціальною Рѣшеніе задачи разнствовало бы отъ предъидущаго только въ томъ, что отъ A до D была бы отложена линія, равная второй данной прямой b.

197. *Другое рѣшеніе.* Можно сдѣлать еще другое построеніе, которое имѣетъ то преимущество предъ первымъ, что занимаетъ менѣе мѣста. Положимъ что даны тѣже самыя три прямыя a, b и c, и требуется найти четвертую пропорціональную. Построивъ произвольный уголъ MAN (черт.

118), и отложивъ на AM, отъ вершины A, прямую $AB=a$ и прямую $AC=b$, и потомъ на AN прямую $AD=c$, проведемъ изъ C прямую CE || BD. На основаніи § 193, получимъ:

$$AB : AC = AD : AE$$
$$\text{или } a : b = c : AE.$$

И такъ AE будетъ требуемая четвертая пропорціональная.

198. *Чрезъ точку C, взятую внутри даннаго угла* FAG (черт. 118) *провести прямую* BD *такъ, чтобы части, содержащіяся между данною точкою и сторонами угла, были бы равны.*

Проведя CE параллельно къ которой нибудь сторонѣ AG даннаго угла и отложивъ DE=AE, проведемъ прямую DB чрезъ точки D и C до пересѣченія съ AG; линія DB и будетъ требуемая прямая, потому что EC будучи параллельна къ AB, дѣлитъ (§ 190) остальныя стороны треугольника DAB на части пропорціональныя, то есть DE : AE=DC : BC; но DE=AE; слѣд. и DC=BC, что и требовалось вывести.

199. Если въ треугольникѣ ABC (черт. 114) проведемъ GH параллельно къ которой нибудь сторонѣ AC, то составимъ треугольникъ BGH. Сравнивая этотъ треугольникъ съ даннымъ, находимъ, по причинѣ параллельности сторонъ GH и AC:

Во 1-хъ, $\angle n=\angle A$, $\angle m=\angle C$ и $\angle B$ есть общій, то есть три угла одного треугольника равны тремъ угламъ другаго.

Во 2-хъ. AB : BG=BC : BH=AC : GH (§§ 193 и 195) то есть стороны одного треугольника пропорціональны сторонамъ другаго.

II. О подобіи треугольниковъ.

200. Если въ двухъ треугольникахъ соотвѣтствующія стороны, то есть между вершинами угловъ лежащія, пропорціональны и углы порознь равны, то таковые треугольники называются *подобными*. Для означенія подобія фигуръ употребляется знакъ: ∾.

Разсмотримъ теперь въ какихъ случаяхъ треугольники подобны; мы увидимъ, что нѣкоторые изъ требуемыхъ условій суть необходимыя слѣдствія другихъ. И такъ, во 1-хъ докажемъ, что:

201. I. *Если всѣ три угла одного треугольника равны порознь тремъ угламъ другаго, то и соотвѣтствующія стороны пропорціональны; слѣд. треугольники подобны.*

Пусть (черт. 114) $\angle B=\angle E$, $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle F$.

Отложивъ на AB прямую BG=DE, и BH=EF на BC, и соединивъ точки G и H прямою GH, составимъ $\triangle GBH=\triangle DEF$, потому что (§ 75) BG=DE, $\angle B=\angle E$, BA=EF. Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что DE=GH и $\angle D=\angle n$; но $\angle D=\angle A$; слѣд. $\angle n=\angle A$. Если же $\angle n=\angle A$, то (§ 84) прямая GH || AC и посему (§§ 193 и 195)

$$BA : BG = BC : BH = AC : GH,$$

А поставивъ вмѣсто вторыхъ членовъ равныя имъ величины, получимъ.

$$BA : DE = BC : EF = AC : DF,$$

то есть соотвѣтствующія стороны треугольниковъ пропорціональны.

202. Слѣдствіе. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ въ 1-хъ, *когда два угла одного треугольника равны порознь двумъ угламъ другаго, то треугольники подобны*, потому что въ такомъ случаѣ и третьи углы равны.

203. Во 2-хъ, *когда стороны одного треугольника параллельны сторонамъ другаго, то треугольники подобны.*

Пусть (черт. 114) DE || AB, DF || AC, и EF || BC. Очевидно, что тогда $\angle E=\angle B$, $\angle D=\angle A$, $\angle F=\angle C$ (§ 201).

Если же (черт. 115) стороны DE=BC, EF || AC, DE || AB, но углы обращены своими отверстіями въ разныя стороны, то и въ такомъ случаѣ они равны. Чтобъ убѣдиться, продолжимъ сторону DE до пересѣченія съ непараллельными сторонами другаго треугольника, то будемъ имѣть:

$$\angle D=\angle a \ (\S\ 91), \text{ а } \angle a=\angle B \ (\S\ 93), \text{ слѣд. } \angle D=\angle B,$$
$$\angle E=\angle b \ (\S\ 93), \text{ а } \angle b=\angle A \ (\S\ 93) \text{ слѣд. } \angle E=\angle A.$$

Если же два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго (§ 203), то треугольники подобны.

204. Въ 3-хъ, *когда стороны треугольника перпендикулярны къ сторонамъ другаго, то треугольники подобны.*

Пусть (черт. 116) FD перпендикулярна къ AC, FE къ AB, ED къ BC. Составимъ внутри треугольника ABC, треугольникъ GIH прямыми GK, IL, HM, которыя были бы параллельны сторонамъ FD, DE, FE и которыя посему (§ 90) должны быть также перпендикулярны къ AC, BC, AB. По причинѣ перпендикулярности прямыхъ GK къ AC, а IL къ BC углы p и q прямые. Въ четыреугольникѣ IKCL сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ (§ 122) равна $4d$, и какъ $\angle p+\angle q=2d$, то и $\angle m+\angle C=2d$; $\angle m+\angle GIH$ также $=2d$ (§ 26); слѣд. $\angle m+\angle C=\angle m+\angle GIH$ и посему $\angle C=\angle GIH$, но $\angle GIH=\angle D$ (§ 103): слѣд. $\angle C=\angle D$

Такимъ же образомъ доказывается равенство и другихъ угловъ треугольниковъ ABC и DEF; слѣд. треугольники подобны (§ 121).

205. *Примѣчаніе.* Углу C противолежитъ сторона AB, а углу D сторона FE, перпендикулярная къ AB; слѣд. взаимно перпендикулярныя стороны суть соотвѣтствующія.

206 II. *Треугольники подобны, если соотвѣтствующія стороны ихъ пропорціональны.*

Пусть (черт. 114) AB : DE=BC : EF=AC : DF. Отложивъ на сторонѣ AB прямую BG=DE, и проведя GH || AC получимъ треугольникъ BGH, подобный треугольнику ABC, потому что (§ 199) углы ихъ равны

каждый каждому, и посему соотвѣтствующія стороны пропорціональны. Теперь осталось доказать равенство треугольниковъ BGH и DEF. По причинѣ параллельности GH и AC,

AB : BG=BC : BH=AC : GH,

а AB : DE=BC : EE=AC : DF, по условію;

но какъ DE=BC то первыя отношенія двухъ этихъ рядовъ равны между собою, а посему и остальныя всѣ также равны между собою. Но какъ у нихъ предъидущіе члены равны, то изъ того слѣдуетъ, что и послѣдующіе равны, то есть BH=EF, GH=DF. По причинѣ же равенства этихъ прямыхъ BG и DE, треугольники BGH и DEF равны (§ 54). И такъ △ BGH ∞ △ ABC, то и △ DEF ∞ △ ABC.

207. III. *Треугольники подобны, когда углы, заключенные между двумя пропорціональными сторонамп равны.*

Пусть (черт. 114) AB : DE=BC : EF и ∠B=∠E. Отложивъ на сторонѣ AB прямую GB=DE и BH=EF на сторонѣ BC, и соединивъ точки G и H прямою GH, построимъ треугольникъ BGH=△DEF (§ 57). Вставимъ въ условной пропорціи, вмѣсто DE и EF, равныя имъ BG и BH, получимъ пропорцію:

AB : BG=BC : BH,

изъ которой (§ 194) слѣдуетъ, что GH=AC; и въ такомъ случаѣ (§ 199) △ABC ∞ △BGH, но △BGH=△DEF; слѣд. ABC ∞ △DEF.

208. *Если гипотенуза и катетъ одного прямоугольнаго треугольника пропорціональны гипотенузѣ и катету другаго, то треугольники подобны.*

Пусть (черт. 117) AB : DE=BC : EF. Отложивъ на BA прямую BG =ED, на BC, прямую BH=EF, соединимъ точки G и H прямою GH. Вставивъ въ условной пропорціи, вмѣсто DE и EF, равныя величины, получимъ пропорцію AB : BG=BC : BH, изъ которой слѣдуетъ (§ 194), что GH || AC. Если же GH || AC то (§ 199) треугольники BGH и BAC подобны, потому что углы одного равны угламъ другаго. Изъ параллельности прямыхъ GH и AC также слѣдуетъ, что ∠BGH прямой, потому что равенъ углу A. Посему прямоугольный треугольникъ BGH равенъ △ EDF, такъ какъ гипотенуза и катетъ одного равны гипотенузѣ и катету другаго. Но △ BGH ∞ △BAC; слѣд. и △ EDF ∞ △BAC.

209. *Общее замѣчаніе.* Въ подобныхъ треугольникахъ пропорціональныя стороны противолежатъ равнымъ угламъ, и обратно.

210. На различныхъ условіяхъ подобія треугольниковъ основаны различныя рѣшенія задачи: *На данной прямой* AC (черт. 114) *построить треугольникъ подобный данному* DEF.

I. Намъ извѣстно (§ 202), что треугольники подобны, когда два угла одного равны двумъ угламъ другаго. И такъ, отложивъ на данной прямой AC уголъ A=∠D. и ∠C=∠E, продолжимъ прямыя AC и CB до пересѣченія въ точкѣ B. Такимъ образомъ начертимъ треугольникъ BAC ∞ △DEF.

II. Потомъ было доказано (§ 206), что треугольники подобны, когда три стороны одного пропорціональны тремъ сторонамъ другаго. И такъ, отъискавъ двѣ прямыя AB и BC, которыя бы относились къ DE и EF такъ какъ AC къ DF, слѣдуетъ только изъ прямыхъ AC, AB, BC по § 48 построить треугольникъ ABC.

III. Далѣе, мы видѣли, что треугольники подобны, если углы, заключающіеся между пропорціональными сторонами, равны. И такъ, отложивъ на данной прямой AC въ точкѣ A уголъ ABC, равный углу D, слѣдуетъ на сторонѣ его отложить прямую AB, четвертую пропорціональную къ DF, AC и DE.

211. *Въ подобныхъ треугольникахъ* ABC *и* DEF (черт. 119) *основанія* AC *и* DF *относятся какъ высоты* BG *и* EH.

Такъ какъ BG перпендикулярна къ AC, а EH къ DF, то углы *n* и *m* прямые, и какъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ BAG и EDH, сверхъ того ∠A=∠D, то треугольники подобны (§ 202) и посему

BG : EH=AB : DE

но и AC : DF=AB : DE

и такъ BG : EH=AC : DF

212. *Прямая* BD (черт. 120), *раздѣляющая какой нибудь уголъ* ABC *треугольника* ABC *пополамъ, дѣлитъ противолежащую сторону на части, пропорціональныя прилежащимъ сторонамъ.*

Изъ точки C проведемъ CE || BD до пересѣченія съ продолженною стороною AB въ точкѣ E. По причинѣ параллельности прямыхъ EC и BD, будемъ имѣть пропорцію:

AD : DC=AB : BE (1)

Далѣе, по причинѣ параллельности тѣхъ же прямыхъ EC и ED:

$\angle e = a$ (§ 93)

$\angle g = b$ (§ 91).

но уголъ $e = \angle g$ по условію: слѣд. и $\angle a = \angle b$; а посему BC=BE (§ 64). И такъ, вставивъ въ пропорцію (1) BC вмѣсто BE, получимъ требуемую

AD : DC=AB : BC.

213. *Изъ одной точки* A (черт. 121) *проведенныя прямыя* AM, AN. AO...., *пересѣкаемыя двумя параллельными* BF *и* GL, I. *раздѣляются на части пропорціональныя, и* II. *сами дѣлятъ параллельныя линіи на части пропорціональныя.*

AG : AB=AH : AC=GH : BC (потому что △ ASH ∞ △ ABC)
AH : AC=AI : AD=HI : CD (потому что △ AHI ∞ △ ACD)
AI . AD=AK : AE=IK : DE (изъ подобія △ AIK и △ ADE),
и проч.

Всѣ эти отношенія равны, потому что второе отношеніе всякаго ряда равно первому отношенію послѣдующаго. Возьмемъ сперва тѣ отношенія, въ которыхъ заключаются прямыя, проведенныя изъ точки A:

AG : AB=AH : AC=AI : AC=AK : AE и т. д. (1)

Потомъ соединимъ отношенія заключающія въ себѣ части параллельныхъ линій GH : BC=HI : CD=IK= : DE.... (2)

Два выведенныхъ ряда (1) и (2) равныхъ отношеній доказываютъ требуемое.

Слѣдствіе. Если въ треугольникѣ AGL проведемъ изъ вершины треугольника нѣсколько прямыхъ, къ основанію, AH, AI, AK...., и раздѣлимъ ихъ прямою BF, параллельною къ основанію, то стороны треугольника AG и AL и изъ вершины A проведенныя прямыя раздѣлятся на части пропорціональныя; основаніе и параллельная къ ней прямая разсѣкаются также на части пропорціональныя.

214. *Раздѣлить данную прямую* MN (черт. 122) *на части пропорціональныя частямъ другой прямой* AD.

Къ данной прямой MN проведемъ чрезъ точку M прямую MP подъ произвольнымъ угломъ PMN, и отложивъ на ней ME=AB, EF=BC, и FG=CD, соединимъ точку G съ конечною точкою N, данной прямой MN, прямою NG. Прямыя FL и EK, проведенныя параллельно къ NG, раздѣлятъ прямую MN согласно требованію задачи, потому что онѣ (§ 190) дѣлятъ стороны △ MGN на части пропорціональныя. И въ самомъ дѣлѣ: въ △ MLF, MK : ME=KL : EF=ML : MF (§§ 192, 193).

Въ △ MNG, ML : MF=LN : FG.... (§ 192);

слѣд. MK : ME=KL : EF=LN : FG.

215. Слѣдствіе. Если бы части прямой AD были равны, то и MN раздѣлилась бы на равныя части. И такъ, чтобы *раздѣлить прямую* MN (черт. 123) *на нѣсколько равныхъ частей*, напр. на 5, слѣдуетъ только, какъ въ предъидущемъ параграфѣ показано, провести изъ конечной точки M подъ произвольнымъ угломъ неопредѣленную прямую MK, и *отложить* на ней 5 равныхъ частей ME, EF, FG...., соединить I съ конечною точкою N, и провести параллельно къ IN прямыя HD, GD, FB, EA, которыя и раздѣлятъ прямую MN на 5 равныхъ частей.

216. Чтобы не проводить много параллельныхъ прямыхъ, прибѣгаютъ къ слѣдующему построенію (черт. 124). Проводятъ изъ конечныхъ точекъ M и N подъ произвольнымъ угломъ двѣ параллельныя прямыя MP и NQ и отложивъ на нихъ произвольныя, равныя между собою, части $Ma=ab=bc....=Ng=gh=hi....$, соединяютъ точки f съ N, e съ g, d съ h.... прямыми fN, eg, dh.... Всѣ эти прямыя параллельны одна къ другой (§ 102), какъ прямыя лежащія между равными и параллельными прямыми. И посему, по § 192

$$Ma'=a'b'=b'c'=c'd'..,$$

217. На теоріи пропорціональныхъ линій основано устройство масштабовъ, служащихъ къ измѣренію прямыхъ и точнѣйшему опредѣленію отношеній между ними. Масштабъ (черт. 125), или размѣръ, есть линейка (большею частію мѣдная), на которой вырѣзанъ прямоугольникъ $a\ l\ i\ e$, раздѣленный прямыми fb, gc, hd на нѣсколько равныхъ прямоугольниковъ $abfl$, $bcgf$ и т. д. Основаніе ab перваго прямоугольника обыкновенно дѣлится на 10 частей и противолежащая ему сторона lf также на 10 равныхъ частей, которыя равны частямъ основанія ab, такъ какъ $lf=ab$. И посему косвенныя прямыя $l9$, $p8$, $q7$..... mb должны быть параллельны между собою (§ 102). Потомъ дѣлятся al и bf, каждая также на 10 равныхъ частей, которыя равны тоже всѣ между собою, потому что al равняется bf. Соединивъ точки 9 съ 9, 8 съ 8, 7 съ 7.... получимъ прямыя, параллельныя къ основанію ab. По причинѣ параллельности прямыхъ $k1$ и mf слѣдуетъ, что

$$k1 : mf=1b : fb;$$

но $1b$ равна $\frac{1}{10}fb$; слѣд. $k1 = \frac{1}{10}mf$, или $\frac{1}{100}lf = \frac{1}{100}ab$.

По причинѣ же параллельныхъ прямыхъ $n6$ и $k1$ имѣемъ,

$$1b : 6b=1k : 6n$$

и какъ прямая $6b$ въ 6 разъ болѣе $1b$, то и $6n$ въ 6 разъ болѣе $1k$, то есть линія $6n=\frac{6}{100}ab$.

Подобнымъ образомъ выведемъ, что прямая $d5= 2,5ab$; $rs=3,54ad$ и т. д. Изъ всѣхъ этихъ примѣровъ явствуетъ, что косвенныя прямыя служатъ для опредѣленія прямыхъ въ сотыхъ частяхъ принятой единицы ab.

218. *Если изъ вершины* B (черт. 126) *прямаго угла прямоугольнаго треугольника проведется перпендикуляръ къ гипотенузѣ* AC, *то треугольникъ раздѣлится на два треугольника* ABD *и* CBD *подобныхъ всему треугольнику, и посему подобныхъ между собою.* Докажемъ сперва, что △ ABD∞△ABC. Во 1-хъ. уголъ A общій обоимъ треугольникамъ; сверхъ сего углы ADB и ABC, по условію, прямые, слѣд. также равны; а посему и самые треугольники (§ 202) подобны.

Точно какимъ же образомъ можно вывести, что △ CBD ∞ △ ABC.

Изъ подобія треугольниковъ ABD и ABC слѣдуетъ, что углы △ ABD равны порознь угламъ △ ABC; изъ подобія же треугольниковъ CBD и ABC слѣдуетъ, что углы треугольника ABC равны порознь угламъ BCD; а посему углы △ ABD равны порознь угламъ △ CBD; слѣд. эти треугольники подобны.

Послѣднее заключеніе можно вывести независимо отъ подобія частныхъ треугольниковъ всему треугольнику. И въ самомъ дѣлѣ $\angle p=\angle q$ какъ прямые; углы $n+m=d$, но $\angle n+\angle A=d$ (§ 109), слѣд. $\angle n+\angle m=\angle n+$

$\angle A$; а изъ сего и слѣдуетъ, что $\angle m = \angle A$. Если же два угла $\triangle$ ABD равны порознь двумъ угламъ треугольника CBD то (§ 202) треугольники подобны.

219. Слѣдствіе. Изъ подобія треугольниковъ ABC и ABD слѣдуетъ:

$$AD : AB = AB : AC, \quad (1).$$

потому что въ подобныхъ треугольникахъ равнымъ угламъ противолежащія стороны пропорціональны (§ 209); а изъ подобія треугольниковъ ABC и CBD, по той же причинѣ:

$$DC : BC = BC : AC \quad (2).$$

Эти двѣ попорціи выражаются слѣдующимъ образомъ: *каждый катетъ есть средняя пропорціональная линія между гипотенузою и прилежащимъ отрѣзкомъ.*

220. Слѣдствіе 2. Изъ подобія же $\triangle$ ABD и CBD выводится:

$$AD : BD = BD : DC \quad (3).$$

то есть *перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная линія лежду отрѣзками гипотенузы.*

221. Сравнимъ стороны прямоугольнаго треугольника и высоту его съ какою нибудь единицею линейной мѣры, которую означимъ буквою k, и пусть $AB = ak$, $BC = bk$, $AC = ck$, $BD = dk$, $AD = ek$, $CD = fk$.

Изъ пропорціи (1) будетъ слѣдовать, вставивъ равныя величины вмѣсто равныхъ,

$$ek : ak = ak : ck,$$

или, сокративъ на k. $e : a = a : c$,

откуда $a^2 = ec$ (4)

то есть квадратъ числа единицъ линейной мѣры, заключающихся въ катетѣ a, равняется произведенію чиселъ, показывающихъ отношеніе гипотенузы AC и прилежащаго отрѣзка AD къ той же единицѣ.

Изъ пропорціи (2) такимъ же образомъ выведемъ, вставивъ равныя величины вмѣсто равныхъ:

$$fk : bk = bk : ck$$

или $f : b = b : c$

откуда слѣдуетъ, что $b^2 = fc$ (5). Сложивъ оба уравненія (4) и (5) получимъ

$$a^2 + b^2 = ec + fc$$

или $a^2 + b^2 = c\,(e+f)$

но $e + f = c$

слѣд. $a^2 + b^2 = c^2$,

то есть, *сумма квадратовъ чиселъ, выражающихъ отношеніе обоихъ катетовъ къ единицѣ, равняется квадрату числа выражающаго отношеніе гипотенузы къ той же единицѣ.*

Эта теорема, извѣстная подъ именемъ Пиѳагоровой, въ честь изобрѣтателя, есть одно изъ главнѣйшихъ и основныхъ геометрическихъ предложеній. Она въ послѣдствіи будетъ доказана еще другимъ образомъ.

222. Покажемъ рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, на ней основанныхъ. Положимъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ $AB = 8$, $BC = 6$, и требуется найти число выражающее гипотенузу. Для краткости мы будемъ впредь вмѣсто чиселъ брать свои линіи, такъ какъ принятыя числа показываютъ величину линій. Изъ § 221 слѣдуетъ:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

или $8^2 + 6^2 = AC^2$

$$64 + 36 = AC^2$$

$$AC^2 = 100$$

$$AC = \sqrt{100}$$

$$AC = 10$$

то есть AC равняется 10 такимъ единицамъ, какихъ въ AB 8, а въ BC 6.

223. Другая задача. Положимъ, что гипотенуза AC извѣстна и равна 10, сверхъ того катетъ $BC = 6$; требуется найти катетъ AB. Изъ § 221 слѣдуетъ:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Вставивъ равныя величины вмѣсто равныхъ, получимъ:

$$6^2 + AB^2 = 10^2$$

или $AB^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$.

слѣд. $AB = \sqrt{64} = 8$.

224. На подобіи треугольниковъ основаны также отношенія между прямыми, проводимыми въ кругѣ. Положимъ, что (черт. 127) въ кругѣ проведены двѣ пересѣкающіяся хорды AB и CD. Проведя хорды CB и AD, составимъ два треугольника OCB и OAD, въ которыхъ $\angle COB = \angle AOD$ какъ противоположные (§ 30); $\angle C = \angle A$, потому что измѣряются половиною одной и той же дуги BD; и посему (§ 102) $\triangle OCB \infty \triangle OAD$. Изъ подобія же треугольниковъ слѣдуетъ (§ 209).

$$OC : AO = OB : OD$$

то есть *части двухъ пересѣкающихся хордъ обратно пропорціональны.*

225. Если бы одна изъ хордъ CD (черт. 128) была діаметромъ, а другая AB къ ней перпендикулярна, то послѣдняя въ точкѣ O раздѣлилась бы пополамъ, то есть $AO = OB$, и тогда бы пропорція

$$OC : AO = OB : OD \ (§\ 224)$$

обратилась бы въ слѣдующую;

$$OC : AO = AO : OD.$$

И такъ *перпендикуляръ* AO, *возставленный изъ произвольной точки* O *діаметра* CD *до окружности, есть средняя пропорціональная линія между отрѣзками діаметра.*

226. Изъ этаго же слѣдуетъ, чтобъ *найти среднюю пропорціональную между прямыми* (черт. 129) a и b, стоитъ только отложить ихъ одну подлѣ другой, потомъ на суммѣ ихъ AC описать полуокружность ABC, изъ точки D, отдѣляющей обѣ прямыя, возставить перпендикуляръ DB до окружности, которой и будетъ искомая прямая, потому что по § 225

AD : DB=DB : DC.

227. Проведя хорду AC (черт. 128), можно вывести слѣдующую пропорцію:

OC : AC=AC : CD (§ 219)

то есть, всякая хорда, проведенная чрезъ конецъ діаметра, есть средняя пропорціональная между діаметромъ и его отрѣзкомъ, составленнымъ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ другой конечной точки хорды на діаметръ.

На этомъ предположеніи основано другое рѣшеніе задачи: найти среднюю пропорціональную между двумя прямыми a и b. Для сего (черт. 130) примемъ бо̀льшую прямую a за діаметръ, отложимъ на ней меньшую b, и изъ конечной точки D прямой AD=b, возставимъ до окружности перпендикуляръ DF. Хорда AF будетъ искомая прямая, потому что

a : AF=AF : b (§ 219).

228. *Двѣ сѣкущія* (черт. 131), *выходящія изъ одной точки, взятой внѣ окружности, и продолженныя до ея отдаленнѣйшей части, обратно пропорціональны внѣшнимъ ихъ частямъ*, то есть

AB : BC=BF : BE.

Для доказательства проведемъ хорды AF и CE и такимъ способомъ составимъ два треугольника ABF и CBE, которые подобны между собою, потому что два угла одного порознь равны двумъ угламъ другаго (§ 202), а именно ∠B есть общій обоимъ треугольникамъ; сверхъ того ∠A=C, такъ какъ измѣряются половиною одной и той же дуги EF (§ 151); изъ подобія же треугольниковъ слѣдуетъ:

AB : BC=BF : BE (§ 308),

что и требовалось доказать.

229. Если себѣ представимъ, что сѣкущая BC обращается около B, какъ около центра, удаляясь отъ AB, то точки пересѣченія F и C будутъ сближаться, и разность между всею BC и внѣшнею ея частію BF будетъ безпрерывно уменьшаться. При всякомъ положеніи BC вышевыведенная пропорція остается справедливою, посему нѣтъ никакой причины сомнѣваться въ ея справедливости и въ томъ случаѣ, когда разность между BC и BF сдѣлается равною нулю, то есть когда BC будетъ касаться въ одной точкѣ C′, или сдѣлается касательною. И тогда будемъ имѣть (§ 228)

AB : BC′=BC′ : BE

то есть, если изъ одной точки, внѣ окружности, проведутся прямая пересѣкающая окружность въ двухъ точкахъ и касательная, то *касательная есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею и ея внѣшнею частію.*

230. Впрочемъ это предложеніе можетъ быть доказано независимо отъ предъидущаго. Пусть (черт. 132) изъ точки B проведены сѣкущая BA и касательная BC. Проведя прямыя AC и CE, получимъ два подобныхъ треугольника ABC и EBC, потому что два угла однаго равны порознь двумъ угламъ другаго, и именно ∠B есть общій, и ∠A=ECB, потому что измѣряются половиною одной и той же дуги EC (§§ 152, 157). Изъ подобія же треугольниковъ и слѣдуетъ, что

AB : BC=BC : BE,

что и доказать надлежало.

231. Положимъ, что сѣкущая AB проходитъ чрезъ центръ, и касательная BC равна діаметру круга ACE, и разсмотримъ, какія слѣдствія въ такомъ случаѣ можно вывесть изъ вышедоказанной пропорціи:

AB : BC=BC : BE

AB—BC : BC=BC—BE : BE (Ариѳм. § 130) (1);

но какъ, по условію, BC=AE то AB—BC=AB—AE=BE. Далѣе, отложивъ BE на BC отъ точки B до F, будемъ имѣть CF=BC—BE. Вставивъ въ пропорцію (1) равныя величины вмѣсто равныхъ, получимъ: BE : BC =CF : BE.

Перемѣстивъ члены, и поставивъ BF вмѣсто BE, будемъ имѣть

BC : BF=BF : CF.

Изъ чего видно, что прямая BC въ точкѣ F дѣлится такъ, что большій отрѣзокъ FB есть средняя пропорціональная величина между цѣлою прямою и меньшимъ отрѣзкомъ, или, какъ говорятъ, прямая CB въ точкѣ F *дѣлится въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.*

232. Изъ сказаннаго видно, *чтобы раздѣлить прямую* B *въ крайнемъ и среднемъ отношеніи*, должно выполнить слѣдующія условія: BC должна одною конечною точкою касаться круга, коего діаметръ равенъ данной BC, а чрезъ другую конечную точку B и чрезъ центръ круга надобно провести сѣкущую, и внѣшнюю ея часть EB отложить на данной прямой отъ B до F; и тогда данная прямая BC раздѣлится въ точкѣ F, какъ требуется въ задачѣ. Чтобъ выполнить эти условія, должно сдѣлать слѣдующее построеніе (черт. 133): изъ конечной точки C данной прямой BC возставить перпендикуляръ CO, равный половинѣ прямой BC, и описать изъ O кругъ ACE, который будетъ касаться прямой BC, потому что BC перпендикулярна къ радіусу OC; а діаметръ круга будетъ равенъ BC, такъ какъ радіусъ его=$^1/_2$ BC. Остальное все уже выведено въ предъидущемъ параграфѣ.

III. О подобныхъ многоугольникахъ.

233. Подобными многоугольниками называются такіе, въ которыхъ углы порознь равны, и стороны между равными углами лежащія пропорціональны. Предложенія, къ нимъ относящіяся, основаны на подобіи треугольниковъ.

234. *Два многоугольника* ABCDEF и $abcdef$ (черт. 134), *составленные изъ одинаковаго числа подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольниковъ, подобны.*

По условію, $\triangle$ AFE ∞ $\triangle$ afe, $\triangle$ AED ∞ $\triangle$ aed и т. д. По причинѣ подобія треугольниковъ углы многоугольниковъ равны, каждый каждому, напримѣръ $\angle F = \angle f$, какъ углы соотвѣтственные подобныхъ треугольниковъ; $\angle FED = \angle fed$, потому что первый составленъ изъ угловъ FEA и AED, которые равны угламъ fea и aed, составляющимъ уголъ fed. Такимъ же образомъ доказывается равенство и прочихъ угловъ обоихъ многоугольниковъ.

Изъ подобія треугольниковъ AFE и afe выводятся слѣдующія равныя отношенія:

$$AF : af = FE : fe = EA : ea \quad (1)$$

Изъ подобныхъ же треугольниковъ AED и aed

$$EA : ea = ED : ed = AD : ad \quad (2)$$

Далѣе, изъ подобныхъ треугольниковъ ADC и adc,

$$AD : ad = DC : dc = AC : ac \quad (3)$$

Послѣднія отношенія каждаго ряда равняются первому отношенію послѣдующаго; посему всѣ отношеніи равны; изъ сего же и слѣдуетъ, что

$$AF : af = FE : fe = ED : ed = DC : dc \text{ и т. д.}$$

то есть сходственныя стороны обоихъ многоугольниковъ пропорціональны; а какъ сверхъ того и соотвѣтствующіе углы равны, то многоугольники подобны.

235. *Если два многоугольника* ABCDEF и $abcdef$ (черт. 134) *подобны, то они могутъ быть раздѣлены на одинакое число подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольниковъ.*

Такъ такъ по условію многоугольники подобны, то соотвѣтствующіе углы равны и сходственныя стороны пропорціональны. Изъ сего можно вывесть, что $\triangle$ AEF ∞ $\triangle$ aef (§ 207), потому что AF : af = FE : fe и сверхъ того $\angle F = \angle f$. Изъ подобія же этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что $\angle FEA = \angle fea$; но какъ цѣлый уголъ FED = fed, какъ сходственные углы многоугольниковъ, то посему и остальныя части угловъ, $\angle AED$ и $\angle aed$, также должны быть равны. Сверхъ того, изъ подобія тѣхъ же треугольниковъ AFE и afe, слѣдуетъ, что

$$FE : fe = AE : ae$$

$$\text{но } FE : fe = ED : ed$$

потому что сходственныя стороны подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны; а изъ этихъ двухъ пропорцій выводится, что

$$AE : ae = ED : ed.$$

Присоединивъ къ этому условію вышевыведенное равенство угловъ AED и aed, убѣдимся (§ 207), что и вторые треугольники AED и aed подобны. Точно такимъ же образомъ выводимъ подобіе и всѣхъ другихъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ: ADC и adc, ACB и acb, сколько бы ихъ ни было.

236. Основываясь на предъидущихъ предложеніяхъ весьма легко рѣшить задачу:

На данной прямой ab (черт. 134) *построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику* ABCDEF.

Для того построимъ на прямой ab треугольникъ abc, подобный ABC, по какому нибудь способу, показанному въ § 210; потомъ начертимъ на ac треугольникъ acd, подобный треугольнику ACD и т. д. пока не будетъ построенъ рядъ треугольниковъ, подобныхъ треугольникамъ, изъ которыхъ составленъ многоугольникъ ABCDEF. Очевидно, (§ 234) что такимъ образомъ составленный многоугольникъ $abcdef$ долженъ быть подобенъ многоугольнику ABCDEF.

237. Можно начертить многоугольникъ, подобный многоугольнику ABCDEF еще проще. Отложивъ на сторонѣ AB часть $Ab' = ab$, проведемъ изъ точки b' прямую $b'c'$ параллельно BC, до пересѣченія съ діагональю AC въ точкѣ c'; далѣе, изъ точки c' прямую $c'd'$ параллельно CD и проч. Очевидно, что такимъ образомъ происшедшіе треугольники $Ab'c'$, $Ac'd'$ и т. д. подобны треугольникамъ ABC, ACD и т. д.; а посему и многоугольникъ $Ab'c'd'e'f'$ подобенъ многоугольнику ABCDEF (§ 234).

238. Въ предъидущихъ чертежахъ діагонали были проведены изъ вершины одного и того же угла; но способъ построенія подобныхъ многоугольниковъ остается тотъ же и для тѣхъ случаевъ, когда діагонали будутъ проведены изъ разныхъ вершинъ; изъ этихъ послѣднихъ случаевъ одинъ въ особенности заслуживаетъ вниманія, потому что въ послѣдствіи можетъ имѣть различныя примѣненія. Онъ состоитъ въ томъ, что соединяютъ вершины всѣхъ угловъ съ конечными точками какой-нибудь изъ сторонъ.

И такъ пусть будутъ данные многоугольники ABCDE и $abcde$ (черт. 135). Соединимъ вершины угловъ E, D, C съ конечными точками прямой AB линіями EB, DA, DB, CA, и вершины угловъ e, d, c прямыми eb, da, db, ca съ конечными точками прямой ab. Такимъ образомъ на основаніи AB составятся три треугольника AEB, ADB, ACB, а на основаніи ab треугольники aeb, adb, acb. Докажемъ, что если эти треугольники подобны, то есть, если треугольникъ AEB ∞ треугольнику aeb, треугольникъ ADB подобенъ треугольнику adb и т. д., то многоугольники подобны.

По условію, $\triangle$ AEB ∞ aeb; слѣдовательно

AB : ab=BE : be; и уголъ ABE=углу abe;

изъ подобія же треугольниковъ ABD и adb слѣдуетъ, что AB : ab=BD : bd, и уголъ ABD равенъ adb; и посему BE : be=BD : bd, а $\angle$ABD—$\angle$ABE=$\angle abd$—$\angle abe$, или $\angle$EBD=$\angle ebd$. Если же въ двухъ треугольникахъ EBD и ebd. стороны, заключающія равные углы, пропорціональны, то (§ 207) треугольники подобны. Такимъ же образомъ можно доказать подобіе слѣдующихъ соотвѣтственныхъ треугольниковъ BDC и bdc. Изъ доказаннаго же подобія треугольниковъ слѣдуетъ подобіе многоугольниковъ ABCDE и $abcde$ (§ 234).

239. Такъ какъ въ подобныхъ многоугольникахъ всѣ сходственныя стороны пропорціональны, то изъ этого слѣдуетъ, что суммы сторонъ или *периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ какія нибудь сходственныя стороны.* И въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія многоугольниковъ (черт. 135) ABCDE и $abcde$ слѣдуетъ:

AB : ab=BC : bc;
AE : ae=BC : bc;
ED : ed=BC : bc;
DC : dc=BC : bc;
BC : bc=BC : bc;

сложивъ сходственные члены (Ариѳм. § 129), и означивъ число сторонъ n, получимъ:

AB+AE+ED+DC+BC : $ab+ae+ed+dc+bc$=nBC : nbc или по сокращеніи членовъ втораго отношенія на n,

Перим. ABCDE : перим. $abcde$=BC : bc,

что и доказать надлежало.

240. Какъ въ правильныхъ многоугольникахъ одинаковаго числа сторонъ не только суммы угловъ, но и самые углы порознь равны (§§ 123, 118) и сверхъ того всѣ стороны одного имѣютъ одно и тоже отношеніе къ сторонамъ другаго, потому что онѣ равны въ обоихъ многоугольникахъ, то посему *правильные многоугольники одинакаго числа сторонъ подобны.* Объяснимъ частнымъ примѣромъ. Пусть (черт. 136) будутъ ABCDE и $abcde$ данные правильные многоугольники. Углы перваго многоугольника не только между собою равны, но и равны угламъ втораго, потому что каждый уголъ равенъ $\frac{2d\ (n-2)}{n}$ (124), а количество n для обоихъ многоугольниковъ, по условію, одно и тоже. Сверхъ сего $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$ и т. д. потому что числители и знаменатели этихъ дробныхъ величинъ равны. И такъ углы данныхъ многоугольниковъ равны между собою, каждый каждому, и стороны пропорціональны, слѣд. многоугольники подобны.

241. Слѣдствіе. Периметры (§ 239) правильныхъ многоугольниковъ

одинаковаго числа сторонъ относятся какъ сходственныя стороны, слѣд. и (черт. 136)

перим. ABCDE : перим. $abcde$=CD : cd (1).

Проведя радіусы OC, OD, oc, od, и апоѳемы OF, of, получимъ во первыхъ (§ 207), подобные треугольники OCD, ocd, потому что уголъ COD=углу cod, такъ какъ каждый изъ нихъ равенъ $\frac{4p}{n}$ (§ 124), и сверхъ того $\frac{OC}{oc}=\frac{OD}{od}$ потому что члены обоихъ дробныхъ выраженій равны между собою. Изъ подобія же треугольниковъ слѣдуетъ, что

CD : cd+OC : oc=OF : of (§ 211)

то есть въ правильныхъ многоугольникахъ, одинаковаго числа сторонъ, стороны относятся между собою какъ радіусы круговъ, описанныхъ или вписанныхъ.

Вставивъ въ пропорціи (1) вмѣсто отношенія CD : cd равныя ему отношенія, получимъ:

Перим. ABCDE : перим. $abcde$=OC : oc=OF : of,

т. е. *периметры правильныхъ многоугольниковъ одинакаго числа сторонъ относятся между собою такъ какъ радіусы круговъ, описанныхъ или вписанныхъ.*

242. Въ § 165 было показано какимъ образомъ, по данному правильному многоугольнику, вписанному въ кругѣ, $abcdef$ (черт. 94), можно описать около круга правильный многоугольникъ ABCDEF такого же числа сторонъ. Эти два многоугольника по § 240 должны быть подобны, и ихъ периметры относятся между собою какъ радіусы круговъ вписанныхъ (§ 241) т. е.

Перим. ABCDEF : перим. $abcdef$=Oa : Oh.

Но разность между радіусомъ Oa и апоѳемою того же круга Oh (§ 174) можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, чрезъ увеличеніе числа сторонъ правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ и описанныхъ, такъ что знаменатель отношенія $\frac{Oa}{Oh}$, будетъ приближаться къ 1, то изъ того и слѣдуетъ, что и разность между отношеніемъ $\frac{\text{Пер. ABCDEF}}{\text{пер. } abcdef}$ и 1 можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, или другими словами: увеличивая число сторонъ описанныхъ и вписанныхъ въ кругѣ правильныхъ многоугольниковъ, можно разность между ихъ периметрами сдѣлать менѣе всякой данной величины.

243. Окружность круга (черт. 95) заключается между периметрами описаннаго и вписаннаго многоугольника. Что она болѣе периметра вписаннаго многоугольника—это очевидно, потому что окружность раздѣлена на столько дугъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ, представляющихъ хорды круга; и какъ каждая дуга болѣе хорды ей соотвѣтствующей, по-

тому что прямая менѣе всякой линіи, проведенной между тѣми же точками (§ 4), то изъ этого слѣдуетъ, что сумма всѣхъ дугъ вмѣстѣ взятыхъ, или окружность, болѣе суммы всѣхъ хордъ ихъ стягивающихъ, или периметра многоугольника, вписаннаго въ кругѣ.

Что окружность менѣе перкметра многоугольника описаннаго около круга—это требуетъ уже точнѣйшаго изслѣдованія. Пусть (черт. 95) около круга *acbmk* описанъ многоугольникъ *sgqts*; будетъ ли онъ правильный или неправильный, но во всякомъ случаѣ его периметръ болѣе окружности круга. Если докажемъ, что ломанная *agb*, объемлющая дугу *acb*, и проведенная между тѣми же точками *a* и *b*, болѣе дуги *acb*, то предложеніе сдѣлается совершенно очевиднымъ, потому чтъ о другихъ частяхъ окружности и ихъ объемлющихъ ломанныхъ линіяхъ можно сдѣлать то же заключеніе.

Очевидно, что между конечными точками *a* и *b* дуги *acb* можно провести много объемлющихъ ломанныхъ линій, и если дуга не есть меньшая линія, то непремѣнно въ числѣ ломанныхъ должна быть одна менѣе прочихъ, и менѣе дуги или, по крайней мѣрѣ, равна ей. Пусть ломаная *agb* будетъ эта объемлющая линія. Между ломанною *agb* и другою *acb* проведемъ произвольную прямую *de*, которая пересѣкла бы ломанную въ точкахъ *d* и *e* потому что

$$de < dge \text{ (§ 4)},$$

прямая короче ломанной, проведенной между тѣми же точками. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ неравенства $ad+eb$, получимъ:

$$de+ab+eb < dge+ad+eb$$

или ломан. $adeb <$ ломан. agb

И такъ объемлющая ломанная *adeb* менѣе объемлющей ломанной *agb* между тѣмъ какъ, по условію, *agb* должна быть короче всѣхъ объемлющихъ ломанныхъ линій. Слѣд. таковое предположоніе не можетъ имѣть мѣста; а изъ сего слѣдуетъ, что дуга *acb* должна быть менѣе всѣхъ объемлющихъ ломанныхъ, проведенныхъ между тѣми же конечными точками.

Изъ этаго же можно заключить, что и сумма всѣхъ дугъ, составляющихъ окружность, должна быть менѣе суммы всѣхъ ломанныхъ, объемлющихъ дуги, посему и менѣе периметра описаннаго многоугольника, составленнаго изъ такихъ ломанныхъ линій.

244. Въ § 242 было доказано, что разность между периметрами описанныхъ и вписанныхъ въ кругѣ правильныхъ многоугольниковъ тѣмъ менѣе чѣмъ болѣе сторонъ въ многоугольникахъ, и что эта разность можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, какъ эта послѣдняя мала бы ни была. А какъ окружность круга (§ 243) менѣе периметра описаннаго многоугольника, а болѣе периметра вписаннаго, то тѣмъ болѣе разность между окружностію и каждымъ изъ означенныхъ периметровъ мо-

жетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. Изъ сего же слѣдуетъ, что окружность круга есть предѣлъ периметра правильнаго многоугольника, какъ вписаннаго такъ и описаннаго около него (§ 9).

245. Если даны двѣ концентрическія окружности, то въ большей можно вписать правильный многоугольникъ, коего стороны не касались бы меньшей окружности, и около послѣдней можно описать правильный многоугольникъ, коего стороны не касались бы большей окружности.

Пусть (черт. 137) CA и CB суть радіусы двухъ концентрическихъ круговъ. Изъ произвольно взятой точки A на меньшей окружности проведемъ касательную NM до пересѣченія съ большею окружностію въ точкахъ M и N. Представимъ себѣ, что въ большей окружности, по правиламъ, прежде уже выведеннымъ, вписанъ какой нибудь многоугольникъ, напримѣръ квадратъ или шестиугольникъ. Если дуга, стягиваемая стороною многоугольника, болѣе дуги NBM, то въ такомъ случаѣ будемъ дѣлить стягиваемую дугу пополамъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ дуги, меньшей дуги MBN. Пусть PBQ таковая дуга, средина которой B, по условію, совпадаетъ съ срединою дуги NBM; въ такомъ случаѣ хорда ее стягивающая PQ будетъ стороною требуемаго правильнаго многоугольника. Что PQ есть сторона правильнаго многоугольника, это слѣдуетъ изъ самаго построенія, потому что дуга PBQ можетъ быть отложена въ окружности цѣлое число разъ (§ 170). Что сторона PQ, такъ какъ и всѣ прочія стороны многоугольника, не будетъ касаться меньшей окружности, это слѣдуетъ изъ того, что хорда PQ, будучи меньше NM, далѣе отстоитъ отъ центра C нежели касательная NM.

Представимъ теперь себѣ, что около меньшей окружности описанъ правильный многоугольникъ, коего стороны менѣе касательной NM, что всегда возможно, потому что при каждомъ послѣдовательномъ удвоеніи числа сторонъ, стороны сдѣлаются менѣе. Пусть будетъ DE сторона такого многоугольника. Если около построеннаго многоугольника вообразимъ себѣ описанный кругъ DEK, то радіусъ его CE очевидно долженъ быть менѣе радіуса BC; и посему периметръ многоугольника, заключающагося въ окружности DEK, не можетъ касаться большей окружности NBML.

IV. Объ отношеніи окружностей.

246. Мы видѣли, что периметры правильныхъ многоугольниковъ (§ 241), вписанныхъ въ окружностяхъ, или около нихъ описанныхъ, относятся между собою какъ радіусы круговъ, если только число сторонъ въ многоугольникахъ будетъ одинаково. Это отношеніе останется тоже самое, если число сторонъ будетъ увеличено въ одинакое число разъ. Но такъ съ увеличеніемъ числа сторонъ разность между периметрами описанныхъ и вписанныхъ многоугольниковъ и окружностями дѣлается менѣе и менѣе,

Переставивъ во послѣдней пропорціи средніе члены, получимъ: то есть,

$$C : R = c : r$$

отношеніе между окружностію и ея радіусомъ во всѣхъ кругахъ одинаково. И такъ, если найдено будетъ отношеніе между окружностію и радіусомъ къ какомъ либо кругѣ, вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлится это отношеніе для всѣхъ окружностей.

Означивъ знаменателя отношенія между окружностію и діаметромъ буквою π, окружность C, радіусъ R, діаметръ D, будемъ имѣть слѣдующія уравненія.

$$C = \pi D.$$

и какъ $D = 2\,R$, то также имѣемъ:

$$C = 2\pi R,$$

И такъ, если бы извѣстна была окружность C, то изъ послѣдняго уравненія имѣли бы:

$$R = \frac{C}{2\pi}$$

250. Очевидно, что знаменатель отношенія между окружностію и діаметромъ можетъ быть приблизительно найденъ посредствомъ вычисленія периметровъ такихъ многоугольниковъ, которые можно вписать въ окружности и описать, основываясь на прежде доказанныхъ предложеніяхъ. Отношенія ихъ периметровъ къ радіусу, или діаметру, могутъ быть опредѣлены столь приблизительныя къ настоящимъ, какъ только требуется; и какъ величина окружности заключается между периметрами соотвѣтствующихъ вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, то посему и отношеніе между окружностію и радіусомъ можетъ быть опредѣлено такъ близко къ настоящему, что разность между найденнымъ знаменателемъ отношенія и истиннымъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, какъ бы мала она ни была. Для опредѣленія этого отношенія нужно рѣшить слѣдующія двѣ задачи:

251. I. *По данной сторонѣ вписаннаго правильнаго многоугольника найти величину стороны вписаннаго многоугольника, имѣющаго вдвое болѣе сторонъ.*

Пусть будетъ AB (черт. 140) сторона какого нибудь правильнаго многоугольника; означимъ ее для краткости буквою a. Опустивъ изъ центра C перпендикуляръ CE на AB, продолжимъ его до пересѣченія D съ A. получимъ сторону вписаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго вдвое болѣе сторонъ, AD (§ 170). Проведя AF, составимъ прямоугольный треугольникъ DAF (§ 153), въ которомъ по § 219 имѣемъ:

$$ED : AD = AD : DF.$$

Взявъ произведенія среднихъ и крайнихъ членовъ, и означивъ для краткости радіусъ DC буквою r, діаметръ DF чрезъ $2r$, а сторону AD буквою x, получимъ:

$$x^2 = 2r.\ ED \quad (1)$$

$$ED = DC - EC;\ \text{а}\ \ EC\ (\text{по § 221}) = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\,r^2 - a^2}\ \text{(II)}.$$ Поставивъ въ уравненіи ED=DC−EC, вмѣсто DC и EC равныя имъ величины, будемъ имѣть:

$$ED = r - \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Вставивъ въ уравненіи (1) вмѣсто ED, получимъ:

$$x^2 = 2r\ (r - \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2})$$

перемноживъ на самомъ дѣлѣ будетъ:

$$x^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}\ \text{(III)}.$$

Но какъ всѣ линіи, проводимыя въ кругѣ, сравниваются съ радіусомъ, то посему его принимаютъ за единицу, и тогда будетъ:

$$x^2 = 2 - \sqrt{4 - a^2}\ \text{(IV)}.$$

И такъ квадратъ стороны вписаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго вдвое болѣе сторонъ въ сравненіи съ даннымъ, равняется 2 безъ квадратнаго корня изъ 4, уменьшенныхъ квадратомъ числа, выражающаго сторону даннаго многоугольника, принимая радіусъ за единицу.

Положимъ теперь, что первоначально вписанъ правильный шестиугольникъ. Въ такомъ случаѣ $a = 1$, потому что (§ 167) сторона правильнаго шестиугольника вписаннаго равняется радіусу. (Для краткости будемъ означать стороны вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ римскими цифрами). Согласно съ прежде выведеннымъ выраженіемъ (IV) имѣемъ:

$$XII^2 = 2 - \sqrt{4^2 - VI^2} = 2 - \sqrt{4 - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$XXIV^2 = 2 - \sqrt{4 - XII^2} = 2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$XLVIII^2 = 2 - \sqrt{4 - XXIV^2} = 2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})}$$

$$= 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$XCVI^2 = 2 - \sqrt{4 - XLVIII^2} = 2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}})}$$

$$= 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

и посему число, выражающее отношеніе стороны вписаннаго правильнаго 96-ка къ радіусу, будетъ:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

Изъ этого вычисленія очевидно какимъ способомъ опредѣляются стороны и прочихъ правильныхъ многоугольниковъ, происходящихъ отъ удвоиванія числа сторонъ.

Произведя на самомъ дѣлѣ дѣйствія, означенныя въ этихъ выраженіяхъ, найдемъ что

XII=0,517638090,	а посему	перим.	12-ка=6,2116571
XXIV=0,261052384	»	»	24-ка=6,2652572
XLVIII=0,130806258	»	»	48-ка=6,2787004
XCVI=0,065438165	»	»	96-ка=6,2820638

и т. д.

253. II. *По данному периметру правильнаго многоугольника, описаннаго въ кругъ, найти периметръ описаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго столько же сторонъ* (черт. 140).

Намъ уже извѣстно, что, во первыхъ, правильные многоугольники одинакаго числа сторонъ подобны (§ 240); и во вторыхъ, они относятся между собою какъ радіусы ихъ, или какъ ихъ апоѳемы (§ 241). И такъ означивъ периметръ описаннаго многоугольника буквою P, его апоѳему α, периметръ вписаннаго многоугольника буквою P′, а апоѳему его α', будемъ имѣть

$$P : P' = \alpha : \alpha'$$

Но апоѳема описаннаго правильнаго многоугольника равняется радіусу вписаннаго круга, $\alpha = r$, и посему

$$P : P' = r \,.\, \alpha'$$

а апоѳема EC (см. § 251 уравн. II) или $\alpha' = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$,

слѣд. $$P : P' = r : \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2};$$

или, такъ какъ r полагается равнымъ 1,

$$P : P' = 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - a^2};$$

а посему $$P = \frac{P'}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}};$$

то есть периметръ какого нибудь правильнаго многоугольника, описаннаго около круга, равняется периметру вписаннаго правильнаго многоугольника того же числа сторонъ, раздѣленному на апоѳему, равняющуюся половинѣ квадратнаго корня изъ 4 безъ квадрата стороны того же многоугольника. И такъ

$$\text{Перим. опис. прав. 96-ка} = \frac{\text{Перим. впис. прав. 96-ка}}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - \text{XCVI}^2}};$$ сдѣлавъ

показанныя здѣсь дѣйствія, найдемъ,

что периметръ опис. правильн. 96-ка=6,2854292.

Изъ этого же слѣдуетъ, что окружность круга, которая болѣе перим. впис. прав. 96-ка и менѣе перим. описаннаго прав. 96-ка будетъ заключаться между.

6,2820638 и 6,2854292;

а посему первыя три цифры, 6,28..... общія обоимъ числамъ, должны быть вѣрными.

253. Поступая, какъ выше показано, мы бы послѣдовательно нашли что

Перим. вписан. прав.	192-ка=6, 282905
перим. описан. прав.	192-ка=6,283746
перим. вписан. прав.	384-ка=6,283115
перим. описан. прав.	384-ка=6,283326
перим. вписан. прав.	786-ка=6,283168
перим. описан. прав.	786-ка=6,283220
перим. вписан. прав.	1536-ка=6,283181
перим. описвн. прав.	1536-ка=6,283194
перим. вписан. прав.	3072-ка=6,283184
перим. описан. прав.	3072-ка=6,283187

Изъ этой таблицы ясно видно, что разность между периметрами описанныхъ и вписанныхъ многоугольниковъ дѣлается менѣе и менѣе, такъ что въ послѣднихъ она менѣе $\frac{1}{100{,}000}$; первыя 5 цифръ десятичныхъ дробей, общія обѣимъ, должны быть общія и для окружности, который длина въ такомъ случаѣ опредѣляется вѣрно до $\frac{1}{100{,}000}$ (радіуса принимаемаго за единицу).

Изъ этой же таблицы можно заключить, что чѣмъ болѣе сторонъ будетъ въ многоугольникѣ, тѣмъ приблизительнѣе опредѣлится отношеніе π и этому приближенію нѣтъ границъ. Знаменитый въ древности геометръ Архимедъ (жившій въ 3-мъ стол. до Р. Х). остановился на 96-кѣ, и нашелъ извѣстное и часто употребляемое отношеніе между окружностью и діаметромъ $3\frac{1}{7}$ или $\frac{22}{7}$. Послѣ того были опредѣлены гораздо точнѣйшія числа *), изъ которыхъ — $\frac{335}{113}$ заслуживаетъ особенное вниманіе по своей простотѣ и приблизительности, потому что оно будучи обращено въ десят. дробь, вѣрно до $\frac{1}{100{,}000}$ Это отношеніе приписываютъ Петру Мецію.

(*) По вычисленіямъ Ланья (Lagny) діаметръ относится къ окружности какъ 1:
3 1415925358979323886264338279502884197169399
337510582097494459230781640628620899862803482
53421170679821480865132823066470038446.
Это отношеніе столь точно, что при вычисленіи окружности, коей діаметръ былъ бы во сто милліоновъ разъ болѣе разстоянія земли отъ солнца, погрѣшность была бы во сто милліоновъ разъ менѣе толщины волоска. Болѣе, кажется, нельзя требовать приблизительнаго вычисленія.

Глава IV.

О ИЗМѢРЕНІИ ПЛОЩАДЕЙ.

I. О измѣреніи площадей прямолинейныхъ фигуръ.



254. Разсмотрѣвъ свойства и отношенія прямыхъ линій, составляющ границы прямолинейныхъ фигуръ, можно теперь приступить къ измѣре площадей, т. е. частей плоскости, ограниченныхъ линіями. Чтобъ из рить какую-нибудь величину, должно найти отношеніе между нею другою съ ней однородною величиною, принимаемою за единицу. По э причинѣ слѣдуетъ сперва показать, въ какомъ отношеніи находятся п молинейныя фигуры при извѣстныхъ условіяхъ.

255. Мы видѣли, что два треугольника при нѣкоторыхъ условія наприм. когда три стороны одного порознь равны тремъ сторонамъ д гаго, совершенно совмѣщаются, и остальныя части, то есть углы, та равны. Таковые треугольники называются *равными*. Площади ихъ, та какъ они совмѣщаются, также должны быть равны, и посему измѣряю одною и тою же мѣрою. По этой причинѣ равные треугольники с также *равномѣрныя* фигуры.

Но равномѣрныя фигуры не всегда бываютъ совмѣщающимися и равными. Наприм. (черт. 141), если въ прямоугольникѣ ABCD, прове діагональ AC, то получимъ (§ 120) два равныхъ треугольника ABC ACD. Продоживъ AB на BE, равную AB, и соединивъ C и E пря CE, построимъ треугольникъ BCE равный △ABC (§ 57). Посему треуг никъ ACE состоитъ изъ двухъ треугольниковъ, ABC и CBE, между бою равныхъ и равныхъ треуг. ABC и ACD изъ которыхъ составленъ □AB Изъ сего же слѣдуетъ, что площади прямоугольника ABCD и треугольн ACE равномѣрны, хотя очевидно они не суть совмѣщающіяся фигуры.

256. *Параллелограммы* ABCD и ABGF, *имѣющіе равныя основа и высоты, равномѣрны* (черт. 142).

Такъ какъ основанія параллелограммовъ, по условію, равны, то посе одинъ параллелограммъ можетъ быть положенъ на другой такъ, что и основанія совпадутъ, Но, по положенію, и высоты ихъ равны, то изъ т слѣдуетъ, что сторона, параллельная основанію втораго параллелограм должна упасть на соотвѣтствующую сторону перваго параллелограмма и ея продолженіе; въ противномъ случаѣ высоты ихъ не были бы равн

Далѣе, треугольники ADF и CBG равны (§ 57), потому что AD=B AF=BG какъ противолежащія стороны параллелограммовъ; и углы D и CBG также равны, потому что стороны ихъ параллельны и отверст обращены въ ту же сторону. Если отъ четыреугольника ABGD отнимемъ равные треугольники ADF и GBC, то получимъ равные остатки. И такъ

параллелогр. ABGF=параллелог. ABCD

въ отношеніи къ ихъ площадямъ, то есть они равномѣрны.

257. *Два прямоугольника, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, не только равномѣрны, но и равны.*

Пусть (черт. 143) въ прямоугольникахъ ABCD и EFGH, основанія AB и EF и высоты AD и EH равны. Такъ какъ AB=CI (§ 114), и EF=HG, то изъ того слѣдуетъ, что DC=HF. Подобнымъ же способомъ можно доказать, что BC=FG. И такъ всѣ стороны одного прямоугольника равны порознь всѣмъ сторонамъ другаго, и сверхъ того и углы однаго равны угламъ другаго, потому что всѣ углы прямые. Изъ сего же слѣдуетъ, что обѣ фигуры, при наложеніи, должны совершенно совмѣститься.

258. *Два прямоугольника, имѣющіе равныя основанія, относятся между собою, какъ высоты.*

Пусть (черт. 144) въ данныхъ прямоугольникахъ ABCD и EFGH основанія AB и EF равны. Въ отношеніи высотъ могутъ быть два случая: онѣ могутъ быть соизмѣримы и несоизмѣримы.

Первый случай. Пусть BC и FG соизмѣримы, и пусть въ первой заключается общая ихъ мѣра 7, а во второй 4 разъ. Раздѣливъ BC на 7 частей, а FF на 4 части и проведя чрезъ точки дѣленія прямыя, параллельныя основанію получимъ въ первомъ 7, а во второмъ 4 равныхъ между собою прямоугольника (§ 257), потому что основанія и высоты ихъ равны. И такъ.

□ABCD : □ EFGH=7 : 4

но и BC : FG=7 : 4

слѣд. □ABCD : □EFGH=BC : FG,

потому что два отношенія, равныя одному и тому же третьему, должны быть равны между собою.

259. *Второй случай.* Пусть высоты BC и FG несоизмѣримы. И въ этомъ случаѣ прямоугольники сохраняютъ то же самое отношеніе: но для большаго убѣжденія докажемъ, что другаго отношенія быть не можетъ. Пусть во 1-хъ (черт. 145), □ ABCD относится къ □EFGH не такъ какъ BC къ FG, но какъ BC къ меньшей линіи, FK, то есть, пусть

□ABCD : □ EFGH=BC : FK.

Представимъ себѣ высоту BC, раздѣленную на части, которыя были бы менѣе KG: то очевидно, что по крайней мѣрѣ одна точка дѣленія O должна упасть между K и G, если части, на которыя BC раздѣлена, по предположенію, будутъ отлагаемы по FG отъ точки F. Проведя чрезъ точку O прямую OL, параллельно основанію EF, составимъ прямоугольникъ EFOL, который съ даннымъ прямоуг. ABCD имѣетъ равныя осно-

ванія EF и AB, и соизмѣримыя высоты FO и BC; слѣд., по 1-му случа

$\square ABCD : \square EFOL = BC : FO$

но, по условію,

$\square ABCD : \square EFGH = BC : FK;$

слѣд., такъ какъ предъидущіе члены этихъ пропорцій равны между с бою, то изъ послѣдующихъ можно бы было составить пропорцію:

$\square EFOL : \square EFGH = FO : FK,$

то есть, тогда меньшій прямоугольникъ EFOL относился бы къ больше EFGH, такъ какъ большая линія FO къ меньшей FK. Этого быть можетъ, и посему сдѣланное предположеніе несправедливо.

Точно такимъ же образомъ опровергается предположеніе, что прям ABCD относится къ прямоуг. EFGH, такъ какъ BC къ линіи, боль нежели FG. А изъ этого должно заключить, что во всякомъ случаѣ,

$\square ABCD : \square EFGH = BC : FG.$

260. Слѣдствіе. Если въ прямоугольникахъ высоты принять за осно нія, то въ такомъ случаѣ основанія сдѣлаются высотами. А изъ это слѣдуетъ (черт. 145), что прямоугольники ABCD и EFGH, имѣющія р ныя высоты AB и EF, должны относиться между собою такъ ихъ осно нія BC и FG.

261. Изъ предъидущихъ параграфовъ слѣдуетъ, что (черт. 146) *пря угольники, имѣющіе разныя основанія и разныя высоты, относят между собою такъ какъ произведенія основаній на высоты.* И въ момъ дѣлѣ, отложивъ на BC прямую BK=EH, и проведя KL паралле ною AB, получимъ:

$\square ABCD : \square ABKL = BC : BK$ (§ 258)

$\square ABKL : \square EFGH = AB : EF$ (§ 260).

Перемноживъ соотвѣтствующіе члены обѣихъ пропорцій, и сокративъ ABKL, будемъ имѣть.

$\square ABCD : \square EFGH = AB \times BC : EF \times BK$

вставивъ въ послѣднемъ членѣ EH вмѣсто BK, получимъ:

$\square ABCD : \square EFGH = AB \times BC : EF \times EH,$

что и доказать надлежало.

262. На послѣднемъ выводѣ основано опредѣленіе отношенія данн прямоугольника къ другому прямоугольнику, принимаемому за едини плоскостной мѣры. За единицу плоскостной мѣры можетъ быть прин всякій многоугольникъ; но въ такомъ случаѣ эта единица была бы вершенно произвольна. Посему и принимаютъ за единицу плоскост мѣры прямоугольникъ, коего стороны равны, то есть квадратъ, въ ко ромъ сверхъ того каждая сторона есть единица линейной мѣры, нап мѣръ: аршинъ, футъ, дюймъ и т. д.

И такъ положимъ (черт. 164), что прямоугольникъ EFGH есть кв

ратъ, коего стороны суть единицы линейной мѣры, и что требуется узнать, сколько разъ онъ содержится въ первомъ прямоугольникѣ ABCD. Намъ уже извѣстно (§ 261), что

$\square ABCD : \square EFGH = AB \times BC : EF \times EG.$

Чтобъ найти требуемое, раздѣлимъ предъидущіе члены на послѣдующіе:

$$\frac{\square ABCD}{\square EFGH} = \frac{AB \times BC}{EF \times FG}$$

или разложивъ вторую часть равенства на сомножители:

$$\frac{\square ABCD}{\square EFGH} = \frac{AB}{EF} \times \frac{BC}{FG} \quad (1)$$

Первая часть выражаетъ число, показывающее, сколько разъ въ данномъ прямоугольникѣ содержится квадратъ EFGH, принимаемый за единицу плоскостной мѣры.

Вторая часть равенства состоитъ изъ двухъ сомножителей, изъ которыхъ первый показываетъ, сколько разъ въ основаніи AB содержится единица линейной мѣры EF, а второй, сколько разъ въ высотѣ BC содержится FG, равная той же единицѣ линейной мѣры EF.

И такъ, чтобъ найти требуемое число, которое показывало бы, сколько разъ въ прямоугольникѣ ABCD содержится единица плоскостной мѣры, должно число показывающее, сколько разъ въ основаніи AB содержится единица соотвѣтствующей линейной мѣры, умножить на число, показывающее, сколько разъ въ высотѣ BC содержится та же единица линейной мѣры.

Для краткости и удобности выраженія въ уравненіи (1) подразумѣваютъ, какъ единицу плоскостной мѣры, такъ и единицы линейной мѣры, и въ такомъ случаѣ оно принимаетъ слѣдующій видъ:

$\square ABCD = AB \times BC,$

то есть, *площадь прямоугольника равняется произведенію изъ основанія на высоту.*

263. Это заключеніе дѣлается совершенно нагляднымъ въ томъ случаѣ, когда стороны даннаго прямоугольника содержатъ въ себѣ единицу линейной мѣры цѣлое число разъ. Пусть (черт. 147) въ основаціи MN содержится единица линейной мѣры *ab* 4 раза, а въ высотѣ ON 5 разъ. Проведя чрезъ точки дѣленія высоты, прямыя параллельно основанію MN, раздѣлимъ весь прямоугольникъ на 5 равныхъ прямоугольниковъ. Каждый изъ этихъ 5 прямоугольниковъ раздѣлится еще на 4 равныя части, если изъ точекъ дѣленія основанія MN проведутся прямыя параллельно высотѣ NO; слѣд. прямоугольникъ MNOP раздѣлится на 5×4 малыхъ прямоугольниковъ, изъ коихъ каждый равенъ квадрату *abcd* (потому что ихъ основанія и высоты равны основанію и высотѣ квадрата *abcd*).

Изъ этаго примѣра видимъ, что для опредѣленія искомаго числа, слѣдуетъ только умножить число 5, показывающее, сколько разъ единица

линейной мѣры содержится въ высотѣ даннаго прямоугольника, на число 4, показывающее, сколько разъ та же единица содержится въ основанiи.

264. Слѣдствiе 1. Если въ прямоугольникѣ MNOP (черт. 147) положимъ, что основ. MN=выс. NO, то прямоугольникъ былъ бы квадратомъ, а мѣра площади его равнялась бы $MN \times MN$, или второй степени его стороны, то есть данный прямоугольникъ содержалъ бы въ себѣ столько единицъ плоскостной мѣры, сколько въ квадратѣ числа, выражающаго основанiе MN, заключается единицъ.

265. Слѣдствiе 2. Въ § 256 было доказано, что параллелограммы, имѣющiе равныя основанiя и высоты, равномѣрны; посему косоугольный параллелограмъ ABCD (черт. 148) равномѣренъ прямоугольнику ABEF; но

$$\square \ ABEF = AB \times EB \ (\S\ 262)$$

слѣд. и параллелогр. $ABCD = AB \times EB$,

то есть, *площадь всякаго параллелограмма равняется основанiю AB умноженному на высоту* (EB).

266. Слѣдствiе 3. Въ предъидущемъ § доказано, что (черт. 149)

$$\text{параллелогр. } ABCD = AB \times CF.$$

А какъ дiагональ CB дѣлитъ параллелограммъ на два равныхъ треугольника, то каждый изъ нихъ равенъ половинѣ параллелогр. ABCD, и такъ

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} \text{ паралл. } ABCD = \tfrac{1}{2} AB \times CF$$

и посему

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} AB \times CF$$

или

$$\triangle ABC = AB \times \tfrac{1}{2} CF$$

то есть, *площадь треугольника равняется половинѣ основанiя умноженнаго на высоту, или основанiю, умноженному на половину высоты.*

Примѣчанiе. Такъ какъ всегда можно построить параллелограммъ, имѣющiй съ даннымъ треугольникомъ равное основанiе и высоту, то посему выведенное заключенiе справедливо для всякаго треугольника. Напримѣръ, чтобы построить для треугольника ABC (черт. 149) требуемый параллелограммъ, стоитъ только изъ B провести BD параллельно AC, а изъ C прямую CD параллельно AB до пересѣченiя съ BD.

267. Слѣдствiе 4. Всѣ треугольники (черт. 150) ABC, ABE, ABF, имѣющiе одно и тоже основанiе AB и высоту, равную CD, равномѣрны, потому что измѣряются одною и тою же величиною.

268. Такъ какъ каждый многоугольникъ можетъ быть раздѣленъ на треугольники, то площадь каждаго многоугольника можетъ быть легко опредѣлена чрезъ вычисленiе площади каждаго треугольника отдѣльно. Положимъ, что требуется опредѣлить площадь трапецiи ABCD (черт. 151). Проведя дiагональ AC, построимъ два треугольника ACD и ABC, изъ коихъ первый имѣетъ своимъ основанiемъ прямую AD, а высотою прямую

FC; во второмъ же можно принять BC основанiемъ, и тогда AG, равная FC, будетъ его высотою. Изъ § 266 слѣдуетъ, что

$$\triangle ADC = AD \times \frac{FC}{2}$$

$$\triangle ABC = BC \times \frac{FC}{2}$$

посему $\triangle ADC + \triangle ABC = AD \times \frac{FC}{2} + BC \times \frac{FC}{2}$,

или трап. $ADCB = (AD + BC)\frac{FC}{2}$ или $\left(\frac{AD+BC}{2}\right) FC$,

то есть, *площадь трапецiи равна суммѣ параллельныхъ сторонъ умноженной на половину высоты, или равна полусуммѣ параллельныхъ сторонъ, умноженной на цѣлую высоту.*

269. Если изъ M, средины AB, проведемъ прямую MN параллельно которой нибудь изъ параллельныхъ сторонъ AD, то (по § 192) раздѣлится и AC въ точкѣ O пополамъ. Если же ON, параллельная AD дѣлитъ сторону AC пополамъ, то она дѣлитъ также и CD пополамъ; а изъ сего слѣдуетъ, что MN соединяетъ средины непараллельныхъ сторонъ AB и CD.

Изъ $\triangle ABC$ слѣдуетъ, что $MO : BC = AO : AC$; но $AO = \frac{1}{2}AC$, слѣд. и $MO = \frac{1}{2}BC$. Такимъ же образомъ доказывается, что и $ON = \frac{1}{2}AD$. Прибавивъ равныя величины къ равнымъ получимъ:

$$OM + ON = \tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}AD$$

или

$$MN = \tfrac{1}{2}(BC + AD)$$

Вставивъ въ найденномъ выраженiи (§ 268) для площади трапецiи:

$$\text{трап. } ADCB = \tfrac{1}{2}(BC + AD) \times FC,$$

вмѣсто $\frac{1}{2}(BC+AD)$ равную величину MN, получимъ

$$\text{трап. } ADCB = MN \times FC.$$

то есть, *площадь трапецiи равна прямой, соединяющей средины не параллельныхъ сторонъ, умноженной на высоту.*

270. Площадь всякаго многоугольника весьма легко опредѣляется, если, какъ выше уже сказано, многоугольникъ будетъ раздѣленъ на треугольники, и потомъ площадь каждаго изъ нихъ будетъ вычислена отдѣльно. Таковыя вычисленiя могутъ быть сокращены тѣмъ, что посредствомъ построенiя находятъ треугольникъ, коего площадь равняется площади даннаго многоугольника. Это построенiе основано на слѣдующей задачѣ:

271. *Построить многоугольникъ, который имѣлъ бы одною стороною менѣе нежели данный, и былъ бы ему равномѣренъ.*

Пусть будетъ (черт. 152) пятиугольникъ ABCDE данный многоугольникъ. Проведя дiагональ EC и прямую DF параллельно ей, до пересѣченiя съ продолженною стороною BC, и соединивъ точку E съ F прямою FE,

построимъ треугольникъ ECF, равномѣрный съ $\triangle$ ECD, потому что они **имѣютъ** равныя основанія и высоты. Если къ этимъ равномѣрнымъ треугольникамъ придадимъ четыреугольникъ ABCE, то получимъ равныя суммы, то есть

$$\triangle EDC + \text{трап. } ABCE = \triangle ECF + \text{трап. } ABCE$$

или

$$\text{трап. } ABCDE = \text{трап. } ABFE.$$

Подобнымъ же построеніемъ можно полученный четыреугольникъ ABFE превратить въ треугольникъ. Для сего проведемъ діагональ EB, прямую FG ‖ EB до пересѣченія съ продолженною AB, и соединимъ E съ G прямою EG.

$$\triangle EBF = \triangle EBG \ (\S\ 266)$$
$$\triangle ABE = \triangle ABE$$
$$\triangle EBF + \triangle ABE = \triangle EBG + \triangle ABE$$

или

$$\text{трап. } ABFE = \triangle AEG,$$

что и доказать надлежало.

272. Положимъ теперь, что требуется *данный треугольникъ* ABC (черт. 153) *превратить въ квадратъ.*

Означимъ сторону искомаго квадрата чрезъ x, то (§ 264), площадь его будетъ $\times x^2$. Но, по условію задачи, площадь квадрата должна быть равномѣрна съ площадью треугольника, и какъ послѣдняя $= AC \times \frac{BD}{2}$, то и составится уравненіе:

$$x^2 = AC \times \frac{BD}{2}$$

откуда слѣдуетъ, что $AC : x = x : \frac{BD}{2}$

то есть *сторона искомаго квадрата равняется средней пропорціональной линіи между основаніемъ даннаго треугольника и половиною высоты.*

Посему (по § 227) слѣдуетъ на AB описать полукругъ и, отложивъ на AC прямую $CG = \frac{1}{2}$ BD, возставить перпендикуляръ FG. Прямая FC будетъ сторона искомаго квадрата.

273. Изъ предъидущихъ параграфовъ слѣдуетъ, что всякую прямолинейную фигуру можно превратить въ треугольникъ; и какъ всякой треугольникъ можетъ быть превращенъ въ квадратъ, то изъ этого и явствуетъ, что всякой многоугольникъ можетъ быть превращенъ въ квадратъ,

272. Чтобъ вывести, чему равняется площадь правильнаго многоугольника *abcde....* (черт. 94), имѣющаго, положимъ, n сторонъ, слѣдуетъ раздѣлить его, изъ центра проведенными линіями, на треугольники, которыхъ будетъ также n. Такъ какъ они равны между собою, то стоитъ только

мѣру одного треугольника Oab умножить на n, чтобъ получить мѣру всего многоугольника *abcdef....*

$$\triangle Oab = ab \times \frac{Oh}{2}$$

слѣд. многоуг. $abcdef = n \times \left(ab \times \frac{Oh}{2}\right)$

$$= n \times ab \times \frac{Oh}{2}$$

но ab, взятая n разъ, равняется периметру (который для краткости означимъ чрезъ P); слѣд.

многоугол, $abcdef = P \times \frac{Oh}{2}$

то есть *площадь правильнаго многоугольника равна периметру умноженному на половину апоѳемы.*

275. Означивъ, для краткости, площадь описаннаго около круга правильнаго многоугольника ABCDEF (черт. 94) буквою Q', периметръ чрезъ P', а апоѳему чрезъ R'; площадь вписаннаго правильнаго многоугольника *abcde* чрезъ Q, периметръ его P, а апоѳему Oh буквою R, получимъ (§ 274):

$$Q' = P' \times \frac{R'}{2}$$

$$Q = P \times \frac{R}{2}$$

слѣд. $$Q' - Q = P' \times \frac{R'}{2} - P \times \frac{R}{2} \quad (1)$$

но (по § 241), $P' : P = R' : R$,

посему $$P' = \frac{P \times R'}{R}$$

вставивъ въ уравн. (1) вмѣсто P' равную величину, получимъ:

$$Q' - Q = \frac{P \cdot R'}{R} \times \frac{R'}{2} - \frac{P \cdot R}{2}$$

или $$Q' - Q = \frac{R'^2}{2R} - \frac{P \cdot R}{2},$$

$$= \frac{(PR'^2 - R^2)}{2R},$$

а какъ $R'^2 - R'^2$, какъ разность квадратовъ, равняется произведенію $R' + R)$ на $(R' - R)$; то

$$Q' - Q = \frac{P(R' + R)(R' - R)}{2R}$$

Но изъ § 174 явствуетъ, что удвоивая число сторонъ описываемыхъ и вписываемыхъ многоугольниковъ, разность между радіусомъ и апоѳемою

можно сдѣлать менѣе всякой данной величины; то изъ сего и слѣдуетъ, что разность между площадями многоугольниковъ Q' и Q можно также сдѣлать менѣе всякой данной величины, потому что въ выраженіи для $Q'-Q$ входитъ сомножителемъ $(R'-R)$.

II. О измѣреніи площади круга и его частей.

276. Изъ предъидущаго (§ 275) явствуетъ, что какъ площадь круга вмѣщается въ площади описаннаго многоугольника, и заключаетъ въ себѣ площадь вписаннаго, то разность между нею и площадью каждаго изъ многоугольниковъ, можетъ тѣмъ болѣе быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. И такъ какъ, при такомъ предположеніи, площадь круга *почти* тождественна съ площадью каждаго изъ многоугольниковъ, а окружность перваго съ периметрами послѣднихъ; то и можно изъ того заключить, что и для площади круга должно быть таковое же выраженіе, то есть, что *площадь круга равняется произведенію изъ его окружности на половину радіуса.*

277. Чтобъ совершенно убѣдиться въ этомъ заключеніи, докажемъ его справедливость, основываясь на способѣ предѣловъ. Означимъ площадь даннаго круга чрезъ C, окружность чрезъ c, радіусъ его чрезъ r, площадь правильнаго многоугольника, описаннаго около круга, чрезъ P, а периметръ его чрезъ p, разность между площадью круга и площадью описаннаго многоугольника пусть равняется X, а разность между окружностью круга и периметромъ многоугольника $=x$. Изъ § 274 слѣдуетъ, что

$$P=p\times {}^1\!/_2 r$$

но $\quad P=C+X$, и $p=c+x$

слѣд. $\quad C+X=(c+x)\times {}^1\!/_2 r,$

или $\quad C+X=c\times {}^1\!/_2 r+x\times {}^1\!/_2 r$

Въ этомъ равенствѣ C и $c\times {}^1\!/_2 r$ постоянныя, X и $x\times {}^1\!/_2 r$ перемѣнныя величины; слѣд. по § 247

$$C=c\times {}^1\!/_2 r$$

т. е. *площадь круга равняется окружности, умноженной на половину радіуса.*

278. Изъ § 249 явствуетъ, что окружность $c=\pi.\,2r$ или $c=2\pi r$; а площадь круга, по § 277, равняется $c\times\frac{r}{2}$, слѣд. равна $2\pi r\times\frac{r}{2}=\pi r^2$, то есть *площадь круга равняется также квадрату радіуса, умноженному на знаменателя отношенія между окружностью и діаметромъ.*

279. И такъ, если бы отношеніе π было точно опредѣлено, то можно было бы построить прямолинейную фигуру, совершенно равномѣрную площади круга. И какъ всякую прямолинейную фигуру можно превратить

въ квадратъ, то изъ того бы слѣдовало, что и кругъ въ такомъ случаѣ могъ бы быть превращенъ въ квадратъ; и въ этомъ состоитъ извѣстная задача: *найти квадратуру круга.*

280. Узнавъ способъ опредѣлять площадь цѣлаго круга, не трудно вывести выраженія для площадей частей его и именно для сектора (то есть вырѣзка круга, заключающагося между двумя радіусами и дугою) и сегмента (§ 185). Точно такъ, какъ въ § 36 доказано, что углы при центрѣ относятся между собою какъ дуги, описанныя равными радіусами изъ вершины угловъ, и лежащія между ихъ сторонами, можно вывести, что и (черт. 24):

$$\text{сект. } ACBA : \text{сект. } DCBD = \smile AB : \smile DB.$$

Если положимъ, что $\smile DB={}^1\!/_4$ окружности, то въ такомъ случаѣ секторъ DCBD заключается въ кругѣ 4 раза, и слѣд. равенъ четверти круга. И такъ, по вставленіи равныхъ величинъ вмѣсто равныхъ, выведенная пропорція приметъ слѣдующій видъ:

$$\text{сект. } ACBA : {}^1\!/_4 \text{ круг. } CB = \smile AB : {}^1\!/_4 \text{ окр. } CB;$$

умноживъ послѣдующіе члены на 4, получимъ:

$$\text{сект. } ACBA : \text{круг. } CB = \smile AB : \text{окр. } CB$$

$$\text{или сект. } ACBA : 2\pi.\, CB\times\frac{CD}{2} = \smile AB : 2\pi CB \text{ (§ 278)},$$

по сокращеніи послѣдующихъ членовъ на $2\pi CB$,

$$\text{сект. } ACBA : \frac{CB}{2} = \smile AB : 1,$$

откуда $\quad$ сект. $ACBA=\smile AB\times\frac{CB}{2}$

то есть, *площадь сектора равна его дугѣ, умноженной на половину радіуса.*

281. Площадь сегмента ADBA (черт. 73) очевидно равняется площади сектора CBDA безъ площади треугольника ACB.

III. *Объ отношеніи площадей прямолинейныхъ фигуръ и круговъ.*

282. Площади двухъ какихъ либо фигуръ должны относиться между собою такъ какъ ихъ мѣры; посему площади двухъ треугольниковъ относятся между собою такъ какъ произведенія изъ ихъ основаній на половины высотъ. И такъ (черт. 119)

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AC\times\frac{BG}{2} : DF\times\frac{EH}{2},$$

или, умноживъ члены втораго отношенія на 2,

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AC\times BG : DF\times EH$$

то есть, *площади двухъ какихъ нибудь треугольниковъ относятся между собою такъ какъ произведенія изъ основаній на высоты.*

283. **Положимъ** теперь, что данные треугольники *подобны;* въ такомъ **случаѣ** (§ 209)

$$AC : DF = AB : DE$$
$$\text{и } BG : EH = AB : DE$$

слѣд. $AC \times BG : DF \times EH = AB^2 : DE^2$

но, въ предъидущемъ параграфѣ доказано:

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AC \times BG : DF \times EH;$$

слѣд. $\triangle ABC : \triangle DEF = AB^2 : DE^2$,

то есть, *площади двухъ подобныхъ треугольниковъ относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*

284. Изъ § 282 слѣдуетъ также, что два треугольника, имѣющіе равныя высоты, относятся какъ основанія, а имѣющіе равныя основанія, относятся какъ высоты.

285. Выведемъ теперь, въ какомъ отношеніи находятся два треугольника, имѣющіе по одному равному углу. Пусть (черт. 155) въ треуг. ABC и DFE уголъ $A = \angle D$. Изъ § 282 слѣдуетъ, что

$$\triangle ABC : \triangle DFE = AC \times HB : DE \times FG \quad (1)$$

Треугольники ABH и DFG подобны, потому что (§ 202) $\angle A = \angle D$, по условію, и $\angle BHA = \angle FGD$, какъ прямые; а изъ ихъ подобія слѣдуетъ, что

$$BH : FG = AB : DF \quad (II)$$

Перемноживъ сходственные члены обѣихъ пропорцій, и сокративъ предъидущіе члены на BH, а послѣдующіе на FG, будемъ имѣть:

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AC \times AB : DE \times DF,$$

то есть *треугольники, имѣющіе по одному равному углу, относятся между собою, такъ какъ произведенія изъ сторонъ, заключающихъ равные углы.*

286. Такъ какъ подобные многоугольники раздѣляются на одинаковое число подобно-расположенныхъ треугольниковъ, имѣющихъ между собою одно и тоже отношеніе, то и подобные многоугольники должны имѣть тоже самое отношеніе. И въ самомъ дѣлѣ (черт. 134), подобные многоугольники ABCDEF и *abcdef* состоятъ изъ одинакаго числа подобныхъ треугольниковъ, которые относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ. И такъ

$$\triangle ABC : \triangle abc = BC^2 : bc^2$$
$$\triangle ACD : \triangle acd = DC^2 : dc^2$$
$$\triangle ADE : \triangle ade = DE^2 : de^2, \text{ и т. д.}$$

. . . .

но, по причинѣ подобія многоугольниковъ:

$$DC^2 : dc^2 = BC^2 : bc^2$$
$$\text{и } DE^2 : de^2 = BC^2 : bc^2$$

слѣд., вставивъ равныя отношенія вмѣсто равныхъ, получимъ:

$$\triangle ABC : \triangle abc = BC^2 : bc^2$$
$$\triangle ACD : \triangle acd = BC^2 : bc^2$$
$$\triangle ADE : \triangle ade = BC^2 : bc^2, \text{ и т. д.}$$

. . . .

Такъ какъ эти пропорціи имѣютъ равныхъ знаменателей отношеній, то можно составить сложную пропорцію чрезъ сложеніе сходственныхъ членовъ, и получимъ:

$$\text{Многоуг. } ABCDEF : \text{мног. } abcdef = BC^2 : bc^2,$$

то есть, *площади подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою такъ какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*

287. Площади двухъ правильныхъ многоугольниковъ одинакаго числа сторонъ, какъ подобныхъ многоугольниковъ (§ 240), относятся также какъ квадраты сторонъ.

И какъ (§ 241) стороны ихъ относятся между собою такъ какъ радіусы круговъ описанныхъ и вписанныхъ, то изъ сего слѣдуетъ, что *площади правильныхъ многоугольниковъ, одинакаго числа сторонъ, относятся между собою какъ квадраты радіусовъ круговъ описанныхъ и вписанныхъ.*

288. Такъ какъ послѣднее заключеніе относится ко всѣмъ правильнымъ многоугольникамъ, одинакаго только числа сторонъ, сколько бы ихъ впрочемъ ни было, и какъ разность между площадями этихъ прямоугольниковъ и площадями круговъ описанныхъ или вписанныхъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой произвольно данной величины; то изъ этого уже можно было-бы сдѣлать еще слѣдующее заключеніе: *площади круговъ относятся какъ квадраты радіусовъ.*

289. Это самое заключеніе можно вывести еще другимъ образомъ. Означивъ для краткости площадь одного круга чрезъ C, а его радіусъ чрезъ R; площадь другаго круга чрезъ c, а радіусъ чрезъ r, получимъ слѣдующія два уравненія (§ 278):

$$C = \pi R^2, \quad c = \pi r^2,$$

изъ коихъ можетъ быть составлена пропорція:

$$C : c = \pi R^2 : \pi r^2;$$

откуда получаемъ, по сокращеніи на π, требуемый выводъ:

$$C : c = R^2 : r^2.$$

290. Теперь слѣдуетъ приступить къ изложенію одного изъ основныхъ и весьма часто встрѣчающихся предложеній Геометріи, которое выражаетъ важнѣйшее свойство прямоугольнаго треугольника, а именно, *что сумма квадратовъ катетовъ равна квадрату гипотенузы.* Это предложеніе уже мы узнали прежде (§ 221): но тамъ было доказано, что вторая степень числа, показывающаго отношеніе гипотенузы къ принятой единицѣ,

равняется суммѣ вторыхъ степеней чиселъ, выражающихъ отношеніе катетовъ къ той же единицѣ. Основываясь на предъидущихъ предложеніяхъ, можно безъ затрудненія доказать, что и квадратъ построенный на гипотенузѣ равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.

Изъ § 219 явствуетъ, что (черт. 156) въ прямоугольномъ $\triangle$ ABC, въ которомъ изъ вершины прямаго угла опущенъ перпендикуляръ BK на гипотенезу AC,

$$AK : AB = AB : AC$$

а изъ этой пропорціи слѣдуетъ, что

$$AB^2 = AC \times AK.$$

Но AB^2 (§ 264), какъ произведеніе стороны AB самой на себя, выражаетъ площадь квадрата ABHI, построеннаго на AB; а $AC \times AK$ выражаетъ площадь прямоугольника AKLD, построеннаго на AK, и имѣющаго своею высотою прямую AD, равную AC; слѣд.

$$\square ABHI = \square AKLD.$$

Точно такимъ же образомъ докажемъ, что и

$$\square BCFG = \square CKLF;$$

слѣд. $\square ABHI + \square BCFG = \square AKLD + \square CKLE$

но $\square AKLD + \square CKLE = \square ACED.$

И такъ $\square ABHI + \square BCFG = \square ACED.$

291. Открытіе этой теоремы приписываютъ Пиѳагору, славному геометру, жившему въ 6-мъ столѣтіи до Р. Х. Его доказательство весьма сходно съ предшествующимъ. Построивъ квадраты на сторонахъ прямоугольнаго треугольника (черт. 156) и опустивъ перпендикуляръ изъ вершины прямаго угла, должно продолжить его до пересѣченія съ DE. И здѣсь также выводится равенство квадратовъ, построенныхъ на катетахъ, съ прилежащими прямоугольниками. Для сего проводятся прямыя BD и IC, и такимъ образомъ происходятъ два равныхъ треугольника IAC и BAD (равныхъ потому, что AI=AB, какъ стороны одного и того же квадрата; AC=AD, по той же причинѣ, и углы между ними лежащіе IAC и BAD равны, такъ какъ каждый изъ нихъ составленъ изъ прямаго угла и остраго угла BAC). Но, по § 266,

$$\triangle IAC = \tfrac{1}{2} \square ABHI$$

$$\text{а } \triangle BAD = \tfrac{1}{2} \square AKLD,$$

$$\text{слѣд. } \tfrac{1}{2} \square ABHI = \tfrac{1}{2} \square AKLD;$$

$$\text{и посему } \square ABHI = \square AKLD \text{ (I).}$$

Точно такимъ же способомъ можно вывести, что

$$\square BCFG = \square CKLE \text{ (II)}$$

Сложивъ уравн. (I) и (II), получимъ:

$$\square ABHI + \square BCFG = \square AKLD + \square CKLE;$$

но какъ прямоугольники AKLD и CKLE вмѣстѣ составляютъ квадратъ

ACDE, построенный на гипотенузѣ AC; то изъ того и слѣдуетъ, что сумма квадратовъ катетовъ равняется квадрату гипотенузы.

292. *Третье доказательство.* Начертивъ (черт. 157) на гипотенузѣ AC крадратъ ACDE, а на катетахъ AB и BC квадраты ABOQ и CBLK, продолжимъ стороны KC и QA до взаимнаго ихъ пересѣченія въ H, опустимъ изъ D перпендикуляръ DG на CH, а изъ E перпендикуляръ EF на DG, и продолжимъ AH до пересѣченія съ EF въ точкѣ I. Такимъ образомъ образуются въ квадратѣ ACDE четыре треугольника и одинъ четыреугольникъ IFGH, и нетрудно доказать что каждый изъ треугольниковъ равенъ данному, и что четыреугольникъ IFGH есть квадратъ, коего сторона равняется разности катетовъ даннаго прямоугольнаго треугольника.

Съ другой стороны, если на большемъ катетѣ BO отложимъ прямую BN, равную меньшему катету BC, и проведемъ NM параллельно BL до пересѣченія съ продолженною KL, то также не трудно доказать, что четыреугольникъ NBLM будетъ квадратъ и равняется квадрату BCKL; и посему шестиугольникъ MLAQON равняется суммѣ квадратовъ катетовъ. Отложивъ на большемъ катетѣ AB прямую AS=BC, проведемъ SP параллельно AQ; потомъ продолживъ MN до пересѣченія съ RS въ точкѣ R, проведемъ въ образовавшихся четыреугольникахъ діагонали MS и AP. Такимъ образомъ шестиугольникъ MLAQON также раздѣлится на четыре треугольника и одинъ четыреугольникъ; и здѣсь также не трудно вывести, что всѣ четыре треугольника равны данному прямоугольному треугольнику ABC, и что четыреугольникъ NOPR есть квадратъ, коего стороны равны разности катетовъ AB и BC. Изъ сего же слѣдуетъ, что квадратъ гипотенузы, и шестиугольникъ MLAQN, или сумма квадратовъ катетовъ, должны быть равны, потому что состоятъ изъ однѣхъ и тѣхъ же частей.

Это доказательство отличается отъ первыхъ двухъ тѣмъ, что посредствомъ показаннаго построенія выводится, что квадратъ гипотенузы и сумма квадратовъ катетовъ могутъ быть раздѣлены на одинаковое число не только равномѣрныхъ, но равныхъ фигуръ; и посему частями обоихъ квадратовъ катетовъ можно закрыть квадратъ гипотенузы.

293. Такъ какъ (черт. 156) квадратъ ABHI равномѣренъ прямоуг. AKLD, а квадратъ BCFG=прямоуг. CKLE (§ 291), то изъ сего слѣдуетъ, что квадраты ABHI и BCFG относятся между собою такъ какъ прямоугольники AKLD и CKLE. Но эти прямоугольники, имѣющіе общую высоту KL, относятся какъ ихъ основанія AK и KC; слѣд. и квадраты ABHI и BCFG относятся такъ какъ AK : KC, то есть какъ прилежащіе отрѣзки гипотенузы.

294. Основываясь на Пифагоровой теоремѣ, весьма не трудно *построить квадратъ, равномѣрный суммѣ двухъ данныхъ квадратовъ.*

Пусть будутъ данные квадраты ABCD и EFGH (черт. 158). Очевидно, что искомый квадратъ долженъ быть квадратомъ гипотенузы такого пря- моугольнаго треугольника, коего стороны равны сторонамъ данныхъ квадратовъ. Чтобы построить таковой треугольникъ, продолжимъ сторону DA квадрата ABCD, и сдѣлавъ предложеніе AI=сторонѣ другаго квад- рата EF, соединимъ I съ B прямою IB. Очевидно, что квадратъ IBKL построенный на IB, будетъ требуемый (291).

295. Основываясь на томъ же предложеніи можно *построить квад- ратъ, равномѣрный разности двухъ данныхъ квадратовъ.* Пусть (черт 158) будутъ ABCD и EFGH данные квадраты.

Такъ какъ требуется построить такой квадратъ, который вмѣстѣ съ меньшимъ квадратомъ EFGH были бы равномѣрны большему квадрат ABCD, то изъ этого слѣдуетъ, что для рѣшенія задачи, должно начертит такой прямоугольный треугольникъ, въ которомъ гипотенуза равнялас бы сторонѣ AB, и одинъ изъ катетовъ сторонѣ EF. Для сего слѣдуетъ только на A'B'=AB описать полуокружность, и на ней отъ B' отложит хорду C'B'=EF; то хорда A'C', соединяющая точки A' и C', будетъ сто- рона искомаго квадрата. И въ самомъ дѣлѣ треугольникъ A'B'C' прям- угольный, потому что уголъ A'B'C' измѣряется половиною полуокружност (§ 153); изъ сего же слѣдуетъ, что

$$\overline{A'B'^2}=\overline{A'C'^2}+\overline{C'B'^2},$$

откуда

$$\overline{A'C'^2}=\overline{A'B'^2}-\overline{C'B'^2}.$$

296. На Пиѳагоровой же теоремѣ основывается выводъ, чему равняетс квадратъ какой нибудь стороны въ какомъ бы то ни было треугольник Пусть будетъ данный треугольникъ ABC (черт. 159), и требуется опр дѣлить чему равняется квадратъ стороны AB, противолежащей остро углу. Для сего раздѣлимъ данный треугольникъ на два прямоугольны треугольника, потому что отношеніе сторонъ въ прямоугольныхъ тр угольникахъ уже выведено. Изъ § 221 слѣдуетъ:

$$\overline{AB^2}=\overline{BD^2}+\overline{AD^2}$$

но AD=AC—DC; слѣд. $\overline{AD^2}=\overline{AC^2}-2AC\times DC+\overline{DC^2}$. Вставивъ въ пер вомъ уравненіи вмѣсто AD^2 равную величину, получимъ:

$$AB^2-\overline{BD^2}+\overline{AC^2}-\overline{2AC}\times DC+\overline{DC^2}$$

но; по § 221, $\overline{BD^2}+\overline{DC^2}=\overline{BC^2}$;

слѣд.

$$AB^2+\overline{BC^2}+AC^2-2AC+DC$$

то есть, *квадратъ стороны, противолежащей острому углу, р няется суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ треугольника, безъ у оеннаго произведенія изъ стороны, къ которой проведенъ перпенди ляръ, на разстояніе отъ основанія перпендикуляра до верш угла, противолежащаго данной сторонѣ.*

Примѣчаніе. Выводъ будетъ одинъ и тотъ же, будетъ ли треуголь- никъ остроугольный или тупоугольный, если только данная сторона про- тиволежитъ острому углу.

297. Положимъ теперь, что данная сторона противолежитъ тупому углу, напримѣръ (черт. 160) сторона AB въ треугольникѣ ABC. Опустивъ изъ вершины B перпендикуляръ BD на продолженную сторону AC, по- лучимъ:

$$\overline{AB^2}=\overline{BD^2}+\overline{AD^2}$$

но $AD=AC+CD$; слѣд. $\overline{AD^2}=\overline{AC^2}+2AC\times CD+\overline{CD^2}$;

и потому $\overline{AB^2}=\overline{BD^2}+\overline{AC^2}+2AC\times CD+\overline{CD^2}$

Изъ прямоугольнаго треугольника BCD слѣдуетъ, что

$$\overline{BD^2}+\overline{CD^2}=\overline{BC^2}$$

и посему $\overline{AB^2}=\overline{BC^2}+\overline{AC^2}+2AC\times CD$

то есть, *квадратъ стороны, противолежащей тупому углу, рав- няется суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ треугольника, увеличен- ной двойнымъ произведеніемъ изъ стороны, къ продолженію кото- рой проведенъ перпендикуляръ, на разстояніе отъ основанія пер- пендикуляра до вершины тупаго угла.*

298. Изъ предъидущихъ параграфовъ слѣдуетъ, что если въ треуголь- никѣ квадратъ одной стороны равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ, то треугольникъ долженъ быть прямоугольный, потому что если-бъ тре- угольникъ былъ остроугольный или тупоугольный, то (§ 296 и 297) отношеніе между сторонами было бы другое.

299. Опредѣлимъ теперь, чему равняется сумма квадратовъ двухъ сторонъ въ какомъ бы то ни было треугольникѣ ABC (черт. 161). Для сего соединимъ вершину угла B, заключающагося между данными сто- ронами AB и BC съ O, срединою третьей стороны, прямою BO.

Изъ § 296 слѣдуетъ: $BC^3=\overline{BO^2}+\overline{OC^2}-2OC\times OD$

а изъ § 297

$$\overline{AB^2}=\overline{BO^2}+\overline{AO^2}+2OC\times OD.$$

слѣд. $\overline{BC^2}+\overline{AB^2}=2\overline{BO^2}+\overline{OC^2}+\overline{AO^2}$;

но $OC=AO$; слѣд. и $\overline{OC^2}=\overline{AO^2}$;

посему $\overline{BC^2}+\overline{AB^3}=\overline{2BO^2}+\overline{2AO^2}$.

Это доказательство остается безъ всякаго измѣненія и для тупоуголь- наго треугольника ABC (черт. 162). А изъ сего слѣдуетъ, что во всякомъ косоугольномъ треугольникѣ *сумма квадратовъ двухъ сторонъ равна удвоенному квадрату линіи, соединяющей средину третьей сто- роны съ вершиною противолежащаго угла, сложенному съ удвоен- нымъ квадратомъ, построеннымъ на половинѣ третьей стороны.*

300. Основываясь на послѣднемъ предложенiи можно опредѣлить, чему равняется сумма квадратовъ всѣхъ сторонъ какого нибудь четыреугольника ABCD (черт. 163). Для сего раздѣлимъ его дiагональю BD на два треугольника ABD и CBD, и соединимъ ихъ вершины A и C съ срединою E ихъ общаго основанiя BD, получимъ

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2 \ (\S\ 299),$$

$$\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{EC}^2+2\overline{DE}^2 \ (\S\ 299),$$

слѣд. $$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EC}^2+4\overline{DE}^2 \ (I).$$

Проведемъ теперь еще другую дiагональ AC, и соединимъ въ образовавшемся треугольникѣ EAC вершину E съ O, срединою прямой AC, получимъ:

$$\overline{AE}^2+\overline{EC}^2=2\overline{AO}^2+2\overline{EO}^2 \ (\S\ 299).$$

Умноживъ обѣ части уравненiя на 2 будемъ имѣть:

$$2\overline{AE}^2+2\overline{EC}^2=4\overline{AO}^2+4\overline{EO}^2.$$

Вставивъ въ уравн. (I) вмѣсто $2\overline{AE}^2+2\overline{EC}^2$ равную величину получимъ

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\overline{DE}^2+4\overline{AO}^2+4\overline{EO}^2;$$

но $4\overline{DE}^2=(2\overline{DE})^2=\overline{DB}^2$; а $4\overline{AO}^2=(2\overline{AO})^2=\overline{AC}^2$;

слѣд. $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=\overline{DB}^2+\overline{AC}^2+4\overline{EO}^2$.

и такъ *сумма квадратовъ всѣхъ сторонъ четыреугольника равна суммѣ квадратовъ дiагоналей сложенной съ четвернымъ квадратомъ линiи, соединяющей средины дiагоналей.*

301. Слѣдствiе. Если-бъ четыреугольникъ ABCD былъ параллелограммъ, то въ такомъ случаѣ дiагонали пересѣкались бы пополамъ, и посему линiя EO слилась бы въ точку, и величина $4\overline{EO}^2$ была бы равна нулю; и такъ *въ параллелограммѣ сумма квадратовъ всѣхъ сторонъ равняется суммѣ квадратовъ дiагоналей.*

302. Построенiе многоугольниковъ равныхъ суммѣ или разности двухъ подобныхъ многоугольниковъ совершенно сходно съ построенiемъ квадрата равнаго суммѣ или разности двухъ квадратовъ. Пусть будетъ ABCDE и *abcde* (черт. 164) два подобныхъ пятиугольника, и требуется построить пятиугольникъ равномѣрный суммѣ данныхъ и имъ подобный.

Для сего построимъ прямоугольный треугольникъ ABI, въ которомъ AB, сторона одного изъ данныхъ пятиугольниковъ, будетъ однимъ катетомъ, а *ab*, сторона соотвѣтствующая другаго пятиугольника, другимъ катетомъ, то есть $AI=ab$. Въ такомъ случаѣ гипотенуза IB будетъ соотвѣтствующей стороною искомаго пятиугольника; то есть пятиугольникъ P′, построенный на IB, такъ, что-бъ онъ былъ подобенъ даннымъ будетъ требуемый.

И въ самомъ дѣлѣ,

$$P' : P=\overline{IB}^2 : \overline{AB}^2 \ (\S\ 286).$$

$$\text{а}\ P' : p=\overline{IB}^2 : \overline{ab}^2 \ (\S\ 286).$$

слѣд. $$2P' : P+p=2\overline{IB}^2 : \overline{AB}^2+\overline{ab}^2;$$

сокративъ предъидущiе члены на 2 получимъ:

$$P' : P+p=\overline{IB}^2 : \overline{AB}^2+\overline{ab}^2;$$

но изъ прямоуг. треугольника AIB слѣдуетъ, что

$$\overline{IB}^2=\overline{AB}^3+\overline{ab}^2;\ \text{слѣд. и}\ P'=P+p.$$

Чтобы построить пятиугольникъ подобный даннымъ ABCDE и *abcde* и равномѣрный ихъ разности, слѣдуетъ только на сторонѣ AB (черт. 164) описать полуокружность, отложить на ней хорду $EB=ab$, соотвѣтствующей сторонѣ меньшаго пятиугольн. *abcde*, провести хорду AE, и на ней построить пятиугольникъ P″, подобный даннымъ, то пятиугольникъ P″ будетъ требуемый:

$$P'' : P=\overline{AE}^2 : \overline{AB}^2$$

$$p : P=\overline{BE}^2 : \overline{AB}^2$$

слѣд. $$P''+p : 2P=\overline{AD}^2+\overline{BE}^2 : 2\overline{AB}^2$$

сокративъ на 2.

$$P''+p : P=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2 : \overline{AB}^2.$$

но $$\overline{AE}^2+\overline{BE}^2=\overline{AB}_2$$

слѣд. $$\text{и}\ P''+p=P$$

а изъ этого слѣдуетъ, что

$$P''=P-p$$

303. Подобнымъ же способомъ, какъ показано въ предъидущемъ параграфѣ, можно построить кругъ, равномѣрный суммѣ и разности двухъ круговъ. Для краткости будемъ означать кругъ, коего дiаметръ есть AB, чрезъ кругъ AB и т. п. Пусть (черт. 165) даны два круга, коихъ дiаметры суть AB и CD, требуется построить кругъ равномѣрный ихъ суммѣ. Для сего на концѣ дiаметра AB возставимъ перпендикуляръ AE, равный дiаметру CD, и соединимъ E въ B прямою EB, которая и будетъ дiаметромъ искомаго круга; потому что

$$\text{круг. EB : круг. AB}=\overline{EB}^2 : \overline{AB}^2,$$

$$\text{круг. EB : круг. CD}=\overline{EB}^2 : \overline{CD}^2;$$

слѣд. сложивъ соотвѣтствующiе члены, и сокративъ предъидущiе на 2, получимъ:

$$\text{круг. EB : круг. AB}+\text{круг. CD}=\overline{EB}^2 : \overline{AB}^2+\overline{CD}^2;$$

но $\overline{EB}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$; слѣд. круг. EB=круг. AB+круг. CD. Чтобы найти кругъ, равномѣрный разности данныхъ круговъ AB и CD, слѣдуетъ только па полуокружности AFB (черт. 166) отложить хорду $AF=CD$, тохорда FB, соединяющая точки F и B, будетъ дiаметромъ искомаго круга; потому что

$$\text{круг. } AB : \text{круг. } CD = \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2,$$

$$\text{круг. } AB : \text{круг. } FB = \overline{AB}^2 : \overline{FB}^2;$$

слѣд. круг. AB : круг. CD+круг. FB $= \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 + \overline{FB}^2$

но $\overline{AB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{FB}^2$; слѣд. и круг. AB=круг. CD+круг. FB

А изъ сего слѣдуетъ, что круг. FB=круг. AB—круг. CD.

304. Изъ § 303 слѣдуетъ, что (черт. 167)

полукр. ABC=полукр. AmB+полук. BqC,

отнявъ отъ обѣихъ равныхъ величинъ общія имъ части сегм. $AnBA \times$ сегм. $ApCB$, получимъ, что

треуг. ABC$=AmBnA+BqCpB$.

Эти криволинейныя фигуры ограниченныя дугами, называются *Гиппократовыми луночками*, потому что свойства этихъ фигуръ имъ были разсматриваемы. Если къ прежнимъ условіямъ прибавимъ еще условіе, что катеты прямолинейнаго треуг. ABC равны, то въ такомъ случаѣ каждая изъ луночекъ равна половинѣ даннаго треугольника. А какъ всякій треугольникъ можетъ быть превращенъ въ квадратъ, то изъ того явствуетъ, что можно построить квадратъ равномѣрный таковой же луночкѣ: а этимъ неопровержимо доказывается, что нѣкоторыя криволинейныя фигуры могутъ быть превращены въ квадраты.

РАЗЛИЧНЫЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

I. Вычисленіе площадей фигуръ и ихъ сторонъ въ числахъ.

305. *По даннымъ катетамъ прямоугольнаго треугольника опредѣлить гипотенузу и площадь его.*

Пусть (черт. 39) катетъ AC=8, BC=9 дюймамъ.

Изъ § 221 слѣдуетъ, что $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

или $\overline{AB}^2 = 64 + 81 = 145$

посему $AB = \sqrt{145} = 12{,}04\ldots$

Итакъ гипотенуза равна 12,04.... дюймамъ. Чтобъ опредѣлить площадь треугольника, слѣдуетъ только (§ 266) основаніе умножить на половину высоты; слѣд.

площадь $\triangle$ ABC$=8+\frac{9}{2}=36$ кв. дюймамъ.

303. *По даннымъ гипотенузѣ и катету найти площадь прямоугольнаго треугольника.*

Пусть (черт. 40) гипотенуза FD=10 дюйм., катетъ DF=6 дюйм. Чтобъ вычислить площадь, слѣдуетъ сперва опредѣлить высоту треугольника, или другой катетъ FE. Этотъ катетъ опредѣлится по Пиѳагоровой теоремѣ:

$$\overline{FE}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DF}^2 = 100 - 36 = 64$$

слѣд. $FE = \sqrt{64} = 8$ дюймамъ.

И такъ площадь DEF $= \frac{6 \times 8}{2} = 24$ кв. дюйм.

307. *Площадь прямоугольнаго треугольника равна 64 квадр. дюймамъ, и сверхъ того большій катетъ вдвое болѣе меньшаго.*

Означимъ меньшій катетъ чрезъ x, то большій катетъ$=2x$, посему площадь даннаго прямоугольнаго треугольника выразится чрезъ $x \cdot \frac{2x}{2}$ или x^2. Но площадь его по условію равна 64:

слѣд. $x^2 = 64$,

и посему $x = 8$.

то есть меньшій катетъ равенъ 8 дюйм., а большій 16 д.

308. *По даннымъ тремъ сторонамъ разносторонняго треугольника найти его площадь.*

Пусть (черт. 155) AB=10, BC=6, AC=12. Такъ какъ основаніе AC извѣстно, то нужно только найти высоту даннаго треугольника BH. Если бы отрѣзокъ основанія AH былъ извѣстенъ, то изъ прямоугольнаго треугольника ABH легко можно-бъ было опредѣлить BH; и для сего слѣдуетъ только припомнить (§ 296) выраженіе для квадрата стороны BC, потому что въ этомъ выраженіи встрѣчается отрѣзокъ AH. И такъ:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AH;$$

$$36 = 100 + 144 - 2.12 \times AH,$$

откуда $24\ AH = 244 - 36 = 208$,

или $AH = \frac{208}{24} = \frac{26}{3} = 8^2/_3$.

Изъ сего же слѣдуетъ, что

высота $BH = \sqrt{10^2 - (8^2/_3)^2} = \sqrt{100 - \frac{676}{9}} = \sqrt{\frac{224}{9}}$

$$= \frac{14{,}967\ldots}{3} = 4{,}989\ldots$$

а площадь $\triangle ABC = \frac{12}{2} \times 4{,}989\ldots = 29{,}93\ldots$

309. *По данной сторонѣ равносторонняго треугольника найти его площадь.*

Пусть (черт. 33) треугольникъ ABC равносторонній, и каждая сторона=10. Высота BD дѣлитъ основаніе AC пополамъ, и посему AD=5; слѣд. $BD = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8{,}66\ldots$,

слѣд. $\triangle ABC=\frac{10}{2}\times 8{,}66=43.3\ldots$

По данной площади равносторонняго треугольника найти его сторону.

Пусть площадь даннаго равносторонняго треугольн. ABC (черт. 33)= 43,3... Означимъ искомую сторону AC чрезъ x, то по предъидущему $AD=\frac{x}{2}$, а

$$\text{высота } BD=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}\ (\S\ 181),$$

$$\text{или } BD=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{x}{2}\sqrt{3};$$

$$\text{посему } \triangle ABC=\frac{x}{x}\cdot\frac{x}{2}\sqrt{3}=\frac{x^2}{4}\sqrt{3};$$

но, по условію, $\triangle ABC=43.3\ldots$;

$$\text{слѣд. } \frac{x^2}{4}\sqrt{3}=43{,}3\ldots.$$

$$\text{или } x^2=\frac{173.2\ldots}{\sqrt{3}}=100\ldots$$

слѣд $x=10$.

310. *По данной площади разносторонняго треугольника найти его стороны.*

Задача неопредѣленная. Треугольники могутъ быть равномѣрны, и посему имѣть одинаковую площадь, при весьма различныхъ сторонахъ. Это явствуетъ изъ § 267 и изъ чертежа 150.

311. *Найти обѣ параллельныя стороны трапецій, если площадь ея=96 кв. д., высота=8 д. и большая изъ параллельныхъ сторонъ втрое болѣе меньшей.*

Означимъ меньшую изъ параллельныхъ сторонъ чрезъ x, то большая$=3x$. Изъ § 268 извѣстно, что площадь трапеціи равна суммѣ параллельныхъ сторонъ, умноженной на половину высоты, или $(x+3x)\frac{8}{2}=4x\cdot 4=16x$; но по условію задачи, площадь трапеціи=96. Посему

$$16x=96$$
$$\text{и } x=6$$

И такъ, меньшая изъ параллельныхъ сторонъ равна 6, а большая 18.

312. *Найти площадь неправильнаго многоугольника.*

Для сего должно данный многоугольникъ раздѣлить діагоналями на треугольники, и опредѣлить по принятому масштабу (§ 217) всѣ его

стороны и діагонали. Вычисливъ, какъ показано въ § 308, площадь каждаго треугольника отдѣльно и сложивъ найденныя мѣры для этихъ площадей, получимъ мѣру для даннаго многоугольника.

Примѣчаніе. Если данный многоугольникъ *abcdef* (черт. 49) правильный, то слѣдуетъ только, по принятому масштабу опредѣлить основаніе *ab*, и высоту *Oh* треугольника *Oab*; по этимъ даннымъ должно опредѣлить его площадь и умножить ее на число сторонъ въ многоугольникѣ, потому что въ послѣднемъ находится именно столько треугольниковъ, равныхъ $\triangle$ *Oab*.

313. *Найти площадь правильнаго шестиугольника* (черт. 94), *коего сторона ab равна* 10.

Сперва должно опредѣлить площадь равносторонняго треугольника *Oab*, какъ показано въ § 309, и найденное число, для его площади 43,3... умножить на число сторонъ, то есть, на 6. Такимъ образомъ происшедшее число 259,8... будетъ мѣрою площади даннаго правильнаго шестиугольника.

314. *По данному радіусу круга опредѣлить его площадь.*

Пусть радіусъ даннаго круга=14 д.; то площадь круга$=3^1/_7\times(14)^2=$ 616 квадр. дюйм (278).

315. *По данной площади круга найти его радіусъ.*

Пусть площадь даннаго круга=154. Означивъ искомый радіусъ чрезъ x, получимъ для площади круга $3^1/_7x^2$; но площадь круга, по условію задачи равна 154; слѣд.

$$3^1/_7x^2=154$$
$$x^2=49$$
$$x=7$$

то есть радіусъ равенъ 7.

316. *Площадь круга равна* 2464, *найти его окружность.*

По предъидущей задачѣ, должно сперва опредѣлить радіусъ и потомъ его умножить на $6^2/_7$ и найдемъ требуемое.

Означивъ радіусъ чрезъ x, получимъ

$$3^1/_7x^2=2464$$
$$x^2=784$$
$$x=28$$

умноживъ найденную мѣру для радіуса 28 на $6^2/_7$, получимъ требуемую мѣру для окружности 176.

317. *Опредѣлить площадь круговаго сектора коего дуга — 24°, а радіусъ 10 дюймамъ.*

Площадь цѣлаго круга, коего радіусъ=10 дюйм., равна $3^1/_7\times100$; а какъ (§ 280).

площ. сектора : площ. круг.$=34 : 360$,

то изъ того и слѣдуетъ, что площадь сектора$=\frac{3^1/_7 \times 100 \times 24}{360}=20{,}9\ldots$ кв. дюймамъ.

II. Алгебраическія рѣшенія геометрическихъ задачъ.

318. *По даннымъ тремъ прямымъ a, b, c опредѣлить четвертую пропорціональную.*

Изъ самаго условія задачи слѣдуетъ, что

$$a : b=c : x$$

откуда выводится, что $x=\frac{bc}{a}$

319. *По даннымъ двумъ прямымъ a и b, опредѣлить третью пропорціональную.*

Означивъ искомую линію чрезъ x., получимъ:

$$a : b=b : x$$

откуда $$x=\frac{b^2}{a}$$

320. *По даннымъ двумъ прямымъ a и b, опредѣлить среднюю пропорціональную.*

Означивъ среднюю пропорціональную x, получнмъ:

$$a : x=x : b$$

откуда $$x^2=ab$$

или $$x=\sqrt{ab}$$

321. *По даннымъ катетамъ прямоугольнаго треугольника a и b найти выраженіе для гипотенузы.*

Означивъ гипотенузу чрезъ x, получимъ, основываясь на Пиѳагоровой теоремѣ (§ 221).

$$x^2=a^2+b^2$$

посему $$x^2=\sqrt{a^2+b^3}$$

322. *По данной гипотенузѣ ($=a$) и катету ($=b$) прямоугольнаго треугольника, найти другой катетъ.*

Означивъ искомый катетъ чрезъ x, будемъ имѣть (§ 221)

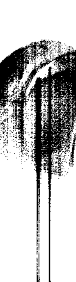
$$a^2=x^2+b^2$$

откуда $$x^2=a^2-b^2$$

и $$x=\sqrt{a^2-b^2}$$

323. *По данной сторонѣ равносторонняго треугольника найти выраженіе для его высоты:*

Пусть (черт. 33) АВС есть треугольникъ равносторонній, и его сторона АС$=a$, то AD$=\frac{a}{2}$. Означивъ высоту чрезъ x, получимъ



$$x^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2 \ (\S\ 223)$$

$$\text{слѣд. } x=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

324. *По даннымъ сторонамъ разносторонняго треугольника, найти выраженіе для его высоты.*

Пусть (черт. 155) АВ$=c$, ВС$=a$, АС$=b$, а высота ВН$=x$. Высота x можетъ быть опредѣлена изъ прямоугольнаго треугольника ВНС, если НС будетъ извѣстна. Чтобъ опредѣлить эту прямую должно взять выраженіе для квадрата стороны АВ. Изъ § 296 слѣдуетъ, что

$$AB^2=BC^2+AC^2-2AC\times HC,$$

или, вставивъ принатыя величины,

$$c^2=a^2+b^2+2b+HC;$$

$$\text{откуда } HC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

Изъ ВНС слѣдуетъ, что НВ$=\sqrt{BC^2-HC^2}$;

$$\text{слѣд. } x=\sqrt{a^2-\left(\frac{a^2+l^2-c^2}{2b}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{(2b)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2(2b)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(2b)^2}}=\sqrt{\frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(2b)^2}}$$

Числитель состоитъ изъ разности двухъ квадратовъ, посему есть произведеніе двухъ сомножителей, изъ коихъ одинъ равняется суммѣ, а другой разности возвышаемыхъ количествъ. И такъ

$$x=\sqrt{\frac{(2ab+(a^2+b^2-c^2)(2ab-(a^2+b^2-c^2))}{(2b)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2ab\times a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{(2b)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{((a+b^2-c^2)(c^2-(a^2+b^2-2ab))}{(2b)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)}{(2b)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)}{2b.}}$$

Эти послѣдовательныя преобразованія легко выводятся, и преимущественно основаны на алгебраическомъ предположеніи, что разность квадратовъ двухъ количествъ равняется суммѣ тѣхъ же количествъ, умноженной на ихъ разность.

325. *Въ равностороннемъ треугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, опредѣлить сторону его и апоѳему, полагая, что радіусъ круга*$=r$.

I. Пусть (черт. 96) AB есть сторона правильнаго шестиугольника, или радіусъ круга (§ 167), то AE будетъ сторона правильнаго или равносторонняго треугольника (§ 167). Прямая EB проходитъ чрезъ центръ, потому что дѣлитъ окружность круга на 2 равныя части, и образуетъ съ AE и AB прямоугольный треугоудьникъ AEB (§ 153); посему

$$\overline{AE}^2=\overline{EB}^2-\overline{AB}^2.$$

но EB, какъ діаметръ,$=2r$, а AB, какъ радіусъ,$=r$.

слѣд. $$\overline{AE}^2=4r^2-r^2=3r^2 \text{ (§ 223)},$$

или $$AE=r\sqrt{3}.$$

II. Изъ прямоугольнаго треугольника OAG (§ 223).

$$OG=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AG}^2};$$

но OA$=$радіусу$=r$, а AG, равная половинѣ стороны равносторонняго треугольника,$=\frac{r}{2}\sqrt{3}$

слѣд. $$OG=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}\cdot 3}=\sqrt{\frac{4r^2-3r^2}{4}}=\sqrt{\frac{r^2}{4}}=\frac{r}{2},$$

то есть апоѳема OG равна половинѣ радіуса

326. *Найти сторону квадрата вписаннаго въ кругѣ, и апоѳему, по данному радіусу.*

I. Пусть будетъ (черт. 97) AB сторона квадрата, и радіусъ OA$=r$. Изъ прямоугольнаго треугольника DAB явствуетъ, что

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BD}^2$$

или $$2\overline{AB}^2=(2r)^2=4r^2,$$

посему $$AB^2=r^2$$

и $$AB=r\sqrt{2}$$

II. Проведя апоѳему OF получимъ прямоугольный треугольникъ OAF, который вмѣстѣ и равнобедренный, потому что уголъ OAF$=\frac{1}{2}d$, а посему и $\angle AOF=\frac{1}{2}d$. А изъ сего слѣдуетъ, что

$$OF=AF=\frac{AB}{2}=\frac{r\sqrt{2}}{2}=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

327. *Опредѣлить сторону описаннаго около круга ровносторонняго треугольника.*

Такъ какъ (§ 241) стороны описаннаго правильнаго многоугольника и вписаннаго, относятся между собою какъ радіусъ круга описаннаго къ радіусу круга вписаннаго или апоѳемѣ, то изъ того слѣдуетъ, что сторона описаннаго равносторонняго треугольника относится къ сторонѣ вписаннаго равносторонняго треугольника, какъ $r:\frac{r}{2}$ (§ 325) или какъ $2:1$,

то есть, сторона описаннаго равносторонняго треугольника вдвое болѣе стороны вписаннаго.

328. *По данной сторонѣ квадрата, вписаннаго въ кругѣ, найти сторону описаннаго квадрата.*

Изъ § 241 слѣдуетъ, что сторона описаннаго квадрата относится къ сторонѣ вписаннаго какъ радіусъ къ апоѳемѣ. И такъ, означивъ сторону описаннаго квадрата чрезъ x, получимъ

$$x : r\sqrt{2}=r:\frac{r}{\sqrt{2}} \text{ (§ 326)}$$

и посему $x=2r$, то есть діаметру.

И въ самомъ дѣлѣ, сторона описаннаго квадрата должа была равна діаметру.

329. *По данной сторонѣ квадрата, вписаннаго въ кругѣ, опредѣлить сторону правильнаго осьмиугольника вписаннаго въ томъ же кругѣ.*

Означимъ искомую сторону чрезъ x, а сторону даннаго квадрата чрезъ A, получимъ (по § 251 уравн. III)

$$x^2=2r^2-r\sqrt{4r^2-A^2},$$

но $A=r\sqrt{2}$ (по § 326); слѣд. $A^2=3r^2$, и посему

$$x^2=2r^2-r\sqrt{4r^2-2r^2}$$
$$=2r^2-r\sqrt{2r^2}$$
$$=2r^2-r\sqrt{2}$$
$$=r^2(2\ \ \sqrt{2}$$

и $$x=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Подобнымъ образомъ можно опредѣлить стороны правильныхъ многоугольниковъ 16,32.... сторонъ, вписанныхъ въ кругѣ и описанныхъ.

330. *По даннымъ тремъ сторонамъ треугольника опредѣлить его площадь.*

Въ § 324 было уже выведено выраженіе для высоты треугольника, коего основаніе$=b$, а другія двѣ стороны a, c. И такъ умноживъ высоту, которая $=\sqrt{\frac{(a+b+c)\ (a+b-c)\ (a+c-b)\ (b+c-a)}{2b}}$ на половину основанія, то есть, на $\frac{b}{2}$ получимъ:

$$\text{площадь } \triangle\ ABC=\frac{b}{2}\cdot\sqrt{\frac{(a+b+c)\ (a+b-c)\ (a+c-b)\ (b+c-a)}{2b}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)\ (a+b-c)\ (a+c-b)\ (b+c-a)}{16}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}$$

Означивъ сумму сторонъ или периметръ треугольника чрезъ p, то есть, $a+b+c=p$; въ такомъ случаѣ $\frac{a+c+b}{2}=\frac{p}{2}$;

$\frac{a+b-c}{2}=\frac{p}{2}-c$; $\frac{a+c-b}{2}=\frac{p}{2}-b$, $\frac{b+c-a}{2}=\frac{p}{2}-a$. И такъ площадь

$\triangle ABC=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-c\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-a\right)}$; то есть *площадь треугольника равняется квадратному корню изъ произведенія полупериметра на разность между полупериметромъ и каждой изъ сторонъ треугольника.*

Примѣръ. Пусть (черт. 159) AB=10, BC=6, AC=12. Периметръ треугольника $=10+6+12=28$, полупериметръ=14; слѣд.

Площ. $\triangle ABC=\sqrt{14(14-10)(14-6)(14-12)}$

$$=\sqrt{14.4.8.2}=\sqrt{896}=29{,}93.... \quad (\S\ 308).$$

331. *Опредѣлить отношеніе стороны вписаннаго въ кругѣ правильнаго десятиугольника и пятиугольника къ радіусу.*

Пусть (черт. 168) AB есть сторона правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ; въ такомъ случаѣ уголъ при центрѣ ACB, составленный радіусами, проведенными чрезъ A и B,

равняется $\frac{4d}{10}$ или $\frac{2}{5}d$. Изъ сего слѣдуетъ, что $\angle CAB+\angle CBA={}^8/_5d$ и какъ они равны между собою (§ 60), то каждый$={}^4/_5d$. Раздѣливъ $\angle CAB$ прямою AD на двѣ равныя части, получимъ два треугольника ACD и DAB.

Въ $\triangle$ ACD, уголъ $ACD={}^2/_5d$, и уголъ CAD также$={}^2/_5d$; слѣд. AD=DC. Въ $\triangle$ ADB, $\angle DAB-{}^2/_5d$, $\angle ABD-{}^4/_5d$ и посему $\angle ADB=2d-({}^2/_5d+{}^4/_5d)={}^4/_5d$, и такъ $\triangle$ ADB есть треугольникъ равнобедренный, и AB=AD. Сверхъ сего $\triangle ADB \backsim \triangle CAB$, потому что имѣютъ равные углы. Изъ сего же подобія слѣдуетъ, что

$$BD : AB = AB : BC.$$

но AB, какъ выше было доказано $=$ AD, а AD $=$ DC; слѣд.

$$BD : DC = DC : BC.$$

Изъ сего явствуетъ, что радіусъ BC въ точкѣ D раздѣленъ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, и что сторона вписаннаго правильнаго десятиугольника AB $=$ DC равняется большему отрѣзку радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

332. И такъ, чтобы найти отношеніе радіуса къ сторонѣ вписаннаго правильнаго десятиугольника стоитъ только раздѣлить радіусъ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Пусть радіусъ$=r$, а большій его отрѣзокъ$=x$, то меньшій$=r-x$ и посему

$$r-x : x=x : r;$$

слѣд.

$$x^2=r^3-rx,$$
$$x^2+rx=r^2$$

$$x=-\frac{r}{2}+\sqrt{r^2\times\frac{r^2}{4}}=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{5r^2}{4}}=-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\sqrt{5},$$

и посему $x=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$

333. На семъ же свойствѣ основанъ способъ вписывать правильные десятиугольники въ кругѣ: стоитъ только радіусъ даннаго круга раздѣлить въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, то большій отрѣзокъ и будетъ требуемая сторона.

334. Чтобы вписать въ данномъ кругѣ правильный пятиугольникъ должно сперва вписать правильный десятиугольникъ и соединить (черт. 169) крайнія точки A и B каждыхъ двухъ прилежащихъ сторонъ AD и DB и т. д. Равенство сторонъ AB, BF, FH..., очевидно слѣдуетъ изъ равенства треугольниковъ; а углы KAB, ABF, BEH и т. д. равны, потому что имѣютъ равныя мѣры.

335. Чтобы вывести отношеніе стороны вписаннаго правильнаго пятиугольника къ радіусу, проведемъ CN перпендикулярно къ DB, и соединимъ D и M прямою DM. Треугольникъ DMB равнобедренный, потому что DM=MB (§ 45), и притомъ подобенъ равнобедренному треугольнику ADB, такъ какъ имѣетъ съ нимъ общій уголъ DBM; изъ подобія же этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что

$$MB : DB=DB : AB$$

и посему $DB^2=MB\times AB$ (I)

Уголъ $DCB={}^2/_5d$, слѣд. $\angle DCN={}^1/_5d$; и посему $\angle ACM={}^3/_5d$. Но и $\angle CAM={}^3/_5d$ (потому что $\angle CAM+\angle CBA=2d-\angle ACB=2d-{}^4/_5d={}^6/_5d$, но $\angle CAM=\angle CBA$; слѣд. каждый изъ нихъ равенъ ${}^3/_5d$). А изъ сего слѣдуетъ, что треугольникъ CAM также равнобедренный, и какъ онъ имѣетъ съ равнобедреннымъ треугольникомъ CAB общій уголъ CAM, то онъ ему подобенъ. Изъ этого же подобія слѣдуетъ, что

$$AM : AC=AC : AB,$$

и посему $AC^2=AM\times AB$ (II)

Сложивъ уравн. (I) и (II) получимъ:

$$DB^2+AC^2=MB\times AB+AM\times AB=3\,(MB+AM)$$

или $\overline{DB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BA}^2$

то есть, *квадратъ стороны вписаннаго правильнаго пятиугольника*

равенъ суммѣ квадратовъ радіуса и стороны вписаннаго правильнаго десятиугольника.

III. Нѣкоторыя задачи изъ практической Геометріи.

336. Практическая Геометрія заключаетъ въ себѣ правила, по которымъ съ помощію извѣстныхъ орудій, можно означать на поверхности земли линіи, углы, фигуры и измѣрять ихъ; опредѣлять высоты предметовъ и разстоянія между ними; снимать различныя мѣстоположенія съ земли, и изображать ихъ на бумагѣ въ уменьшенномъ видѣ и т. п. Здѣсь будутъ показаны самыя простѣйшія задачи, какъ примѣненія нѣкоторыхъ теоремъ Планиметріи.

337. При рѣшеніи задачъ, мы будемъ принимать, что всѣ данные предметы находятся на одной плоскости, хотя это предположеніе не совершено точно. Планета наша, какъ извѣстно, имѣетъ видъ шара, а посему ея поверхность какъ и всякая ея часть, есть кривая; но предположеніе наше можетъ быть потому допущено, что пространства нами разсматриваемыя, въ сравненіи съ цѣлою земною поверхностью, весьма малы.

338. Притомъ будемъ излагать такія задачи, которыя могутъ быть рѣшены съ помощію самыхъ простыхъ орудій, какъ напр. цѣпей и кольевъ.

339. Для измѣренія небольшихъ разстояній на землѣ служитъ сажень, на которой означены футы и дюймы; для большихъ разстояній употребляется цѣпь, сдѣланная изъ толстой желѣзной проволоки, длиною въ 10 сажень. Каждая сажень раздѣлена также на футы, соединенные между собою маленькими кольцами; въ концѣ же каждой сажени прикрѣплены маленькія бляшки, съ означеніемъ числа саженей.

340. Колья бываютъ различной величины, и для удобнѣйшаго вколачиванія, одинъ конецъ оковывается заостреннымъ желѣзомъ. Чтобы поставить колъ въ вертикальномъ положеніи, прикладываютъ къ верхнему концу кола нитку съ свинцовою гирью, или отвѣсъ, и устанавливаютъ колъ до тѣхъ поръ, пока нитка не будетъ параллельна его поверхности, гдѣ бы ее не приложили.

341. Чтобы провести прямую линію на землѣ отъ одной данной точки къ другой, должно въ данныхъ мѣстахъ вколотить въ отвѣсномъ положеніи колья, потомъ между ними въ небольшихъ разстояніяхъ установить другія колья такъ, чтобы изъ за каждаго кола не видны были прочіе. Натянувъ между каждыми двумя кольями веревку, проводятъ вдоль ея остріемъ кола требуемую прямую.

342. *Въ данной точкѣ* D (черт. 170) *данной прямой* DN *на землѣ отложить уголъ равный данному* BAC.

Отложивъ на сторонахъ даннаго угла BAC равныя линіи AH и AG, слѣдуетъ на данной прямой DN отмѣрить прямую DE=AH, и поставить

колья въ точкахъ D и E. Сдѣлавъ на какой нибудь веревкѣ, которая однакожъ должна быть длиннѣе AG+GH петлю и надѣвъ ее на колъ D, отмѣриваютъ на веревкѣ часть равную линіи AG; сдѣлавъ тамъ отмѣтку и отложивъ еще часть равную GH, дѣлаютъ петлю, которая надѣвается на колъ E. Натянувъ крѣпко веревку, означаютъ коломъ точку F, гдѣ ляжетъ сдѣланная отмѣтка. Проведя прямую FD по веревкѣ, построимъ уголъ FDE, равный данному BAC, что очевидно явствуетъ изъ равенства треугольниковъ (§ 54).

343. *Данный треугольникъ на полѣ перенести на бумагу, или начертить на бумагѣ треугольникъ подобный данному.*

Для сего слѣдуетъ только измѣрить всѣ три стороны даннаго треугольника, потомъ по принятому масштабу изобразить ихъ линіями. Изъ этихъ линій составленный на бумагѣ треугольникъ будетъ требуемый, потому что стороны даннаго треугольника будутъ пропорціональны сторонамъ треугольника начерченнаго на бумагѣ.

344. *Найти разстояніе между двумя приступными предметами.*

Если отъ однаго предмета къ другому можно провести прямую, то эта прямая или самое разстояніе измѣряется съ помощію цѣпи. Если же прямой провести нельзя, то въ такомъ случаѣ искомое разстояніе можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ:

Пусть будутъ (черт. 171) A и B данные предметы, и пусть находится между ними какое-нибудь препятствіе для непосредственнаго измѣренія ихъ разстоянія. Избравъ въ нѣкоторомъ разстояніи такое мѣсто C, изъ котораго можнобъ было видѣть оба предмета, проводятъ изъ него двѣ прямыя CA и CB (§ 341), и на каждой изъ нихъ отлагаютъ какую нибудь кратную часть, но только одинакую на обѣихъ прямыхъ, наприм. пусть $CD=\frac{1}{5}AC$, а $EC=\frac{1}{5}BC$; то въ такомъ случаѣ разстояніе DE будетъ $\frac{1}{5}AB$, потому что DE, должна быть по строенію параллельна AB. И такъ смѣривъ DE, слѣдуетъ только полученную мѣру умножить на 5, и получимъ требуемую мѣру разстоянія AB.

345. *Опредѣлить разстояніе между двумя предметами* (черт. 172) A *и* B, *если только къ одному* A *подойти можно.*

Избравъ мѣсто C, изъ котораго оба предмета можнобъ было видѣть, слѣдуетъ провести прямыя AC и CB. Продолживъ AC неопредѣленно, и отложивъ на продолженіи какую нибудь кратную часть прямой AC, напр. пятую, построимъ въ точкѣ D на прямой CD уголъ CDF=BAC, и проведемъ DF до пересѣченія съ продолженною BC въ точкѣ F. Треугольники CFD и ACB имѣютъ равные углы каждый каждому, и посему они подобны; а изъ ихъ подобія слѣдуетъ, что

$$AB : FD = AC : CD,$$

но AC=5CD, по положенію; слѣдовательно и AB=5FD. И такъ, измѣривъ FD, слѣдуетъ мѣру этой прямой взять 5 разъ, чтобъ опредѣлить разстояніе AB.

346. *Примѣчаніе.* Если бы оба предмета A и B были неприступные, то должно избрать мѣсто C, изъ коего оба предмета были бы видны, измѣрить по предъидущему § разстоянія AC и BC, и потомъ поступить какъ показано въ § 344.

347. *Измѣрить высоту приступнаго предмета* (черт. 173.

Въ одной плоскости съ вершиною даннаго предмета должно поставить отвѣсно два кола различной величины FD и EC въ такихъ точкахъ, чтобъ вершина предмета съ вершинами кольевъ находилась на одной прямой. Вообразивъ, что изъ точки E проведена прямая EH || AC, получили бы два подобныхъ треугольника BHE и FGE, изъ подобія которыхъ слѣдовала бы пропорція:

$$BH : FG = HE : EG,$$

въ которой FG равняется разности высотъ обоихъ кольевъ, HE разстоянію отъ даннаго предмета до малаго кола, EG разстоянію между обоими кольями, слѣд. BH можетъ быть опредѣлена. Прибавивъ HA, то есть высоту меньшаго кола къ BH, найдемъ всю высоту даннаго предмета.

348. *Измѣрить высоту неприступнаго предмета.*

Если предметъ AB неприступенъ (черт. 173), то въ такомъ случаѣ надлежитъ сперва опредѣлить (по § 345) разстояніе AC, и потомъ, уже по предъидущей задачѣ, найти часть всей высоты BH. Приложивъ къ ней, какъ выше сказано, высоту меньшаго кола EC, найдемъ всю высоту AB.

349. *Начертить фигуру подобную данному мѣсту, ограниченному прямыми линіями,*

Пусть данное мѣсто имѣетъ видъ какого нибудь многоугольника (черт. 134) ABCDEF. Проведя вышепоказаннымъ способомъ (§ 341) діагонали AC, AD, AE и измѣривъ ихъ какъ и всѣ стороны многоугольника, стоитъ только построить треугольники *adc*, *cad* и проч., опредѣливъ сперва ихъ стороны *ab*, *bc*, *ac* и т. д. по принятому масштабу. Изъ § 234 явствуетъ, что многоугольникъ *abcdef* будетъ подобенъ данному, потому что они состоятъ изъ равнаго числа одинакимъ образомъ расположенныхъ подобныхъ треугольниковъ.

Если данное мѣсто будетъ ограничено кривыми, и требуется только приблизительно составить подобную фигуру, то въ такомъ случаѣ вписываютъ прямолинейный многоугольникъ, коего периметръ, какъ можно ближе, подходилъ бы къ фигурѣ даннаго мѣста, переносятъ его на бумагу и потомъ по глазомѣру исправляютъ сдѣланныя отступленія.

IV. Задачи, относящіяся къ различнымъ статьямъ.

350. *Въ данномъ треугольникѣ вписать квадратъ, коего основаніе находилось бы на основаніи треугольника.*

Пусть будетъ ABC (черт. 174) данный треугольникъ и положимъ, что въ немъ уже вписанъ квадратъ HGFE, и посему задача состоитъ въ томъ, чтобъ опредѣлить отношеніе между стороною искомаго квадрата и извѣстными линіями даннаго треугольника, то есть, его основаніемъ и высотою. Первое означимъ чрезъ b, а вторую чрезъ a.

Означимъ сторону квадрата черезъ x, и вспомнивъ, что (§ 211) въ подобныхъ треугольникахъ CGH и CBA основанія HG и AB относятся какъ высоты CI и CD, получимъ:

$$x : b = a - x : a$$

откуда $ax = ab - bx$

посему $ax + bx = ab$

или $x(a+b) = ab$

и $x = \dfrac{ab}{a+b}$

И такъ отношеніе между стороною квадрата и линіями a и b опредѣлено, теперь слѣдуетъ выразить величину x геометрически, т. е. найти какая линія равняется $\frac{ab}{a+b}$. Изъ алгебры извѣстно, что изъ двухъ сомножителей можно составить пропорцію, наблюдая только то, что сомножители одного произведенія должны быть крайними, а сомножители другаго средними членами. Такъ какъ

$$x = \frac{ab}{a+b} \text{ или}$$

$x(a+b) = ab$,

то $x : b = a : a+b$

то есть искомая линія x есть четвертая пропорціональная линія къ $a+b$, a и b. Чтобы найти самую линію или, какъ говорится, чтобы построить линію x, отложимъ (§ 196) на продолженномъ основаніи AB, сперва b отъ D до K, потомъ a отъ K до L и соединивъ L съ C, проведемъ KI параллельно CL до пересѣченія съ высотою CD въ I. Линія DI будетъ равна величинѣ x, потому что

$$DI : DK = DC : DL$$

или $x : b = a : a+b$

351. *Въ квадратѣ вписать равносторонній треугольникъ.*

Положимъ (черт. 175), что треугольникъ BFE есть требуемый. Очевидно, что отрѣзки AF и EC должны быть равны по причинѣ равенства треугольниковъ ABF и BCE, а посему и остальныя части FD и DE сторонъ даннаго квадрата также равны между собою. Означимъ стороны искомаго треугольника чрезъ x, стороны квадрата чрезъ a, отрѣзокъ EC или AF чрезъ y, то DE=DF=$a-y$. Изъ $\triangle$BEC слѣдуетъ, что

$$\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{EC}^2$$

или $x^2 = a^2 + y^2$

Изъ $\triangle$FED: $\overline{FE}^2 = \overline{FD}^2 + \overline{ED}^2$

или $x^2 = (a-y)^2 + (a-y)^2 = 2(a-y)^2$.

Изъ выведенныхъ двухъ уравненій слѣдуетъ:

$$a^2+y^2=2(a-y)^2$$

или $a^2+y^2=2a^2-4ay+2y^2$

или $y^2-4ay=y^2-a^2$

$$y=2a\pm\sqrt{(2a)^2-a^2}$$

Чтобъ опредѣлить линію, выражающую величину y, или другими словами, построить полученное уравненіе, разсмотримъ сперва коренную величину $\sqrt{(2a)^2-a^2}$. Не трудно усмотрѣть, что это выраженіе (§ 223) означаетъ катетъ такого прямоугольнаго треугольника, коего гипотенуза $=2a$, а другой катетъ$=a$. Вычтя полученную линію изъ $2a$, найдемъ отрѣзокъ отъ стороны квадрата, означенный чрезъ y. И такъ отложивъ отъ точекъ C и A, линіи CE=AF=y, соединимъ F и E прямою FE, которая и будетъ стороною искомаго треугольника. Соединивъ точки E и F съ B прямыми FB и EB, построимъ требуемый равносторонній треугольникъ BFE.

352. *Провести общую касательную къ двумъ окружностямъ.*

Положимъ, что къ даннымъ окружностямъ проведена общая касательная Nn (черт. 176), и что она пересѣкаетъ продолженную линію Cc, соединяющую центры обѣихъ окружностей, въ точкѣ O. Очевидно, что если опредѣлится точка O, или, что все равно, разстояніе ея cO отъ центра меньшаго круга, то вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлится, изъ какой точки должно провести касательную, по извѣстному способу (§ 182), къ одной окружности nab, которая вмѣстѣ была бы касательною и къ другой.

Проведемъ радіусы NC, nc чрезъ точки касанія. Они должны быть параллельны, потому что они (§ 142) перпендикулярны къ одной и той же линіи Nn. Проведя линію nM параллельно cC, получимъ два подобныхъ треугольника NMn и ncO (§ 199); изъ подобія которыхъ слѣдуетъ пропорція

$$cO : nc = Mn : MN,$$

въ которой второй членъ равенъ радіусу меньшей окружности, третій членъ=Mn=Cc=разстоянію между центрами, а послѣдній членъ=MN=NC—MC=NC—nc=разности между радіусами обѣихъ окружностей. Неизвѣстный членъ cO можно опредѣлить по извѣстному уже способу. Отложивъ его на продолженной линіи Cc, отъ c до O, стоитъ только изъ точки O провести касательную On къ меньшей окружности, и продолжить ее, то она коснется и другой въ одной только точкѣ N.

353. *Построить равнобедренный треугольникъ равномѣрный данному.*

Пусть (черт. 177) ABC будетъ данный треугольникъ. Такъ какъ въ равнобедренномъ △ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, дѣлитъ его на двѣ равныя части, то изъ того слѣдуетъ, что вершина искомаго треугольника должна находиться на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины основанія E. Такъ какъ высота его должна быть равна высотѣ даннаго, то вершина его будетъ также находиться на линіи CF, проведенной параллельно основанію; слѣд. вершина искомаго треугольника должна находиться на пересѣченіи прямыхъ EG и CF, то есть въ точкѣ D. И въ самомъ дѣлѣ, соединивъ D съ A и B прямыми AD и DB, построимъ треугольникъ DAB, имѣющій съ даннымъ одно и тоже основаніе и равную высоту и посему ему равномѣрный; и какъ сверхъ того его стороны (по § 45) равны, то онъ долженъ быть равнобедренный.

354. *Построить прямоугольникъ равномѣрный данному* ABCD (черт. 178), *и чтобы его основаніе было равно данной прямой* NM.

Такъ какъ основаніе искомаго прямоугольника уже извѣстно, то слѣдуетъ только найти его высоту. Означимъ ее чрезъ x. Площадь даннаго прямоугольника=AB×AD, а искомаго=NM. x; и какъ по условію обѣ площади должны быть равны, то

$$AB\times AD=MN.x,$$

откуда $NM : AB=AD : x$,

то есть, чтобъ опредѣлить искомую высоту, должно къ даннымъ тремъ прямымъ NM, AB, AD найти четвертую пропорціональную. Для сего слѣдуетъ только основаніе даннаго прямоугольника продолжить, и сдѣлать AG=NM; соединивъ D и G прямою DG, и проведя BI параллельно DG, получимъ искомую высоту AI, потому что AG или NM : AB=AD : AI. Прямоугольникъ AGHI, имѣющій AG основаніемъ, а AI высотою, будетъ требуемый.

355. *Построить равносторонній треугольникъ равномѣрный данному* ABC (черт. 179).

Построивъ на сторонѣ AC равносторонній треугольникъ AEC, продолжимъ EA до пересѣченія съ прямою BD, проведенной изъ вершины даннаго треугольника параллельно основанію, и описавъ на DE полуокружность, возставимъ изъ A перпендикуляръ AF, до пересѣченія съ окружностію. Равносторонній треугольникъ GFA, построенный на FA, будетъ требуемый.

Данный треугольникъ ABC равномѣренъ треугольнику DAC, потому что имѣетъ общее основаніе AC, а вершины B и D находятся на прямой BD, параллельной основанію, а посему и высоты равны. Но

$$\triangle DAC : \triangle CAE=DA : AE \qquad (§ 284),$$

слѣд. $\triangle BAC : \triangle CAE=DA : AE$ (I)

Треугольники GFA и CAE, будучи оба равносторонніе, подобны, и посему (§ 283).

$$\triangle GFA : \triangle CAE=\overline{FA}^2 : \overline{AE}^2$$

но $\overline{FA}^2=DA\times AE$ (§ 219);

слѣд. $\triangle GFA : \triangle CAE=DA\times AE : \overline{AE}^2$

или $\triangle GFA : \triangle CAE=DA : AE$ (II)

Сравнивъ пропорціи (I) и (II) находимъ, что вторые, третьи и четвертые члены въ нихъ равны, слѣд. и первые должны быть равны; и такъ

$\triangle BAC = \triangle GFA$.

356. *Начертить многоугольникъ, подобный данному* ABCED (черт. 180), *и чтобы площади относились между собою, такъ какъ данныя двѣ прямыя и т. п.*

Отложимъ на неопредѣленной линіи FB прямыя *n* и *m*, или двѣ прямыя, которыя бы находились въ такомъ же отношеніи, и опишемъ на суммѣ ихъ FH полуокружность. Изъ точки G, отдѣляющей отложенныя линіи, возставимъ перпендикуляръ GK до пересѣченія съ окружностію въ точкѣ K, и проведемъ прямыя KH и KF. Отложивъ на KF часть KI, равную которой нибудь изъ сторонъ даннаго многоугольника AB, и проведя изъ точки I прямую IL параллельно FH, получимъ KL, которая будетъ стороною искомаго многоугольника, соотвѣтственною сторонѣ AB; то есть, если на KL начертимъ по извѣстнымъ правиламъ (§ 236) многоугольникъ KLNOP, подобный ABCED, то этотъ многоугольникъ будетъ требуемый. И въ самомъ дѣлѣ:

многоуг. KLNOP : многоуг. $ABCED = \overline{KL}^2 : \overline{KI}^2$,

но $KL : KI = KH : KF$; слѣд. $\overline{KL}^2 : \overline{KI}^2 = \overline{KH}^2 : \overline{KF}^2$;

но $\overline{KH}^2 : \overline{KF}^2 = GH : FG$ (§ 293) слѣд., поставивъ равныя отношенія вмѣсто равныхъ, получимъ:

мног. KLNOP : мног. $ABCED = GH : FG = m : n$.

357. Основываясь на этой задачѣ, можно строить фигуры, которыя были бы подобны даннымъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе или менѣе ихъ въ данное число разъ. Напримѣръ, если требуется начертить пятиугольникъ, подобный данному ABCDE, и притомъ въ 5 разъ большій, то въ такомъ случаѣ прямая *m* должна быть сдѣлана въ 5 разъ болѣе *n*.

358. *Раздѣлить данный треугольникъ на три равномѣрныя части прямыми, проведенными параллельно основанію.*

Раздѣлимъ которую нибудь сторону AB (черт. 181) даннаго треугольника ABC на три равныя части, и возставимъ изъ точекъ дѣленія I и L перпендикуляры IH и LK до пересѣченія съ полуокружностію, описанною на AB какъ на діаметрѣ. Описавъ изъ точки A радіусомъ AH дугу HE, и радіусомъ AK дугу KD, опредѣлимъ точки E и D, чрезъ которыя должны быть проведены прямыя EF и DG параллельно основанію BC, чтобы раздѣлить треугольникъ на три равномѣрныя части.

Такъ какъ EF и DG параллельны BC, то изъ того слѣдуетъ, что треугольники AFE, AGD и ABC подобны; а изъ этого подобія слѣдуетъ, что

$$\triangle AFE : \triangle AGD : \triangle ABC = \overline{AE}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$$

или, поставивъ равныя величины вмѣсто равныхъ,

$$\triangle AFE : \triangle AGD : ABC = \overline{AH}^2 : \overline{AK}^2 : \overline{AB}^2$$
$$= AI \times AB : AL \times AB : \overline{AB}^2 \text{ (§ 219)},$$

по сокращеніи на AB, получимъ:

$\triangle AFE : \triangle AGD : \triangle ABC = AI : AL : AB$.

Изъ сего же слѣдуетъ, что трапеціи FEDG и GDBC равномѣрны треугольнику AFE.

359. *Данный треугольникъ* ABC (черт. 182) *раздѣлить на три равномѣрныя части прямыми, проведенными изъ точки* F, *взятой на которой нибудь изъ сторонъ.*

Раздѣливъ основаніе AC на три равныя части, и проведя изъ вершины B прямыя BD и BE въ точки дѣленія D и E, мы бы раздѣлили данный треугольникъ на три равномѣрныя части, потому что треугольники ABD, BDE, EBC имѣютъ равныя основанія и одну и туже высоту. Соединивъ данную точку F съ вершиною треугольника прямою BF, и проведя изъ точекъ дѣленія E и D прямыя EG и DH параллельно прямой BF, опредѣлимъ точки G и H, чрезъ которыя должны проходить прямыя FG и FH, дѣлящія треугольникъ, согласно условію. И въ самомъ дѣлѣ,

$$\triangle EHA = \triangle ADH + \triangle FDH$$
$$\text{но } \triangle FDH = \triangle BDH \text{ (по § 267)};$$
$$\text{слѣд. } \triangle FHA = \triangle ADH + \triangle BDH = BAD;$$

но мы выше видѣли, что $\triangle BAD = \frac{1}{3} \triangle BAC$.

$$\text{слѣд. } \triangle EHA = \tfrac{1}{3} \triangle BAC.$$

Точно такимъ же образомъ можно доказать, что и четыреугольн. FHBG и треугольникъ FGC равняются одной трети всего треугольника ABC.

ОТДѢЛЕНІЕ II.

О ТѢЛАХЪ.

Глава I.

(составляющая введеніе въ стереометрію).

О ПОЛОЖЕНІИ ПРЯМЫХЪ, ВЪ РАЗНЫХЪ ПЛОСКОСТЯХЪ НАХОДЯЩИХСЯ, И ВЗАИМНОМЪ ПОЛОЖЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ; О ПЛОСКОСТНЫХЪ И МНОГОГРАННЫХЪ УГЛАХЪ.

I. О положеніи прямыхъ, въ разныхъ плоскостяхъ находящихся.

360. Точки, линіи и фигуры, которыя, до сего времени были разсматриваемы, предполагались на одной и той же плоскости. Прежде нежели приступимъ къ изложенію теоремъ, относящихся къ протяженіямъ трехъ измѣреній, слѣдуетъ разсмотрѣть, въ какихъ соотношеніяхъ могутъ быть плоскости между собою и прямыя линіи къ плоскостямъ.

361. Въ § 4 было объяснено, что плоскостью называется такая поверхность, на которой можно себѣ вообразить прямыя линіи, совмѣщающіяся съ нею во всѣхъ направленіяхъ. Такъ какъ поверхность, а посему и плоскость, есть неопредѣленное протяженіе въ длину и ширину, то по этой же причинѣ плоскость, вообще взятая, не имѣетъ предѣловъ и опредѣленнаго очертанія. Обыкновенно представляютъ ее въ видѣ косоугольнаго параллелограмма NM, какъ показано въ черт. 183.

362. Представимъ себѣ, что на плоскости NM проведена прямая AB, и что плоскость NM обращается около прямой AB, какъ около оси. Очевидно, что она можетъ притомъ находиться въ весьма различныхъ положеніяхъ, измѣняющихся до безконечности. А изъ сего слѣдуетъ, что чрезъ одну прямую можно провести безчисленное множество плоскостей: изъ этого же выводится заключеніе, что нельзя опредѣлить положенія плоскости одною прямою на ней находящеюся.

363. Такъ какъ на прямой AB можно вообразить безчисленное множество точекъ, и плоскость, проходящая чрезъ прямую, проходитъ также и чрезъ всѣ точки на ней взятыя; то изъ сего слѣдуетъ, что одна точка или нѣсколько точекъ на одной прямой взятыхъ, не опредѣляютъ положенія плоскости.

364. Представимъ себѣ теперь, что плоскость NM (черт. 184), обращаясь около AB, приходитъ въ такое положеніе, при которомъ и прямая AC будетъ лежать на ней всѣми своими точками. Не трудно убѣдиться

въ томъ, что плоскость NM при малѣйшемъ обращеніи, уже не будетъ проходить чрезъ AC, и что слѣдовательно плоскость при одномъ только положеніи проходитъ чрезъ обѣ прямыя, и посему положеніе двухъ прямыхъ AB и AC, пересѣкающихся въ точкѣ A, совершенно опредѣляетъ положеніе плоскости NM, или, чрезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя можно провести только одну плоскость.

365. Такъ какъ положеніе точекъ B, A, C совершенно опредѣляетъ положеніе прямыхъ BA и CA, то посему положеніемъ трехъ точекъ B, A, C не на одной прямой находящихся, опредѣляется положеніе плоскости NM.

366. Въ § 364 объяснено, что черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя (или чрезъ такія двѣ прямыя, которыя по достаточномъ продолженіи пересѣкаются) можно провести плоскость. Если же прямыя не параллельны, и не пересѣкаются по достаточномъ продолженіи, то въ такомъ случаѣ не можетъ быть проведена чрезъ нихъ плоскость. Напримѣръ чрезъ прямую, начерченную на полу комнаты, и другую непараллельную прямую, проведенную на стѣнѣ, нельзя вообразить плоскости, если данныя прямыя не встрѣчаются взаимно тамъ, гдѣ плоскость пола соединяется съ плоскостью стѣны.

367. Если прямая, по достаточномъ продолженіи, встрѣчаетъ плоскость, то она ее пересѣкаетъ въ одной только точкѣ. Положимъ, что она пересѣкла бы плоскость въ двухъ точкахъ; въ такомъ случаѣ эти точки были бы общія для данной прямой и для данной плоскости, и между ними находилась бы часть данной прямой и часть плоскости. Изъ сего бы слѣдовало, что часть данной прямой, а посему и самая прямая лежала бы на плоскости, — что противно сдѣланному условію. И такъ *прямая, встрѣчающая плоскость, пересѣкаетъ ее только въ одной точкѣ.*

368. *Если же плоскость пересѣкаетъ другую плоскость, то взаимное ихъ пересѣченіе есть прямая линія* (§ 185).

Въ самомъ дѣлѣ пусть пересѣкается плоскость NM плоскостью PQ, и въ числѣ ихъ общихъ точекъ пусть находятся три, наприм. A, C, D не въ прямой линіи; то обѣ плоскости NM и PQ проходя чрезъ три точки, не на одной прямой находящіяся, должны слиться въ одну (§ 365). Изъ сего же слѣдуетъ, что всѣ общія ихъ точки должны быть на одной прямой, или что общее ихъ пересѣченіе должно быть прямою линіею.

369. Прямыя могутъ имѣть такое же положеніе относительно плоскостей, какое имѣютъ относительно другихъ прямыхъ, въ одной плоскости съ ними находящихся, то есть, могутъ быть *параллельны* къ плоскостямъ когда ихъ не пересѣкаютъ, какъ бы далеко и въ какую бы сторону ни были продолжены; въ противномъ случаѣ онѣ называются *непараллельными.* Если прямая перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости чрезъ точку пересѣченія, тогда прямая называется *пер-*

пендикулярною къ плоскости. Если же данная прямая не ко всѣмъ прямымъ перпендикулярна, которыя проведены на плоскости чрезъ точку пересѣченія, то она называется *наклонною къ плоскости.*

370. *Докажемъ теперь, что если прямая* AP (черт. 186) *перпендикулярна къ двумъ прямымъ* PF *и* PG, *проведеннымъ на плоскости* NM *чрезъ точку пересѣченія* P, *то она перпендикулярна ко всякой прямой* PO, *проведенной чрезъ* P *въ той же плоскости, а слѣд. и къ плоскости* NM.

Проведя чрезъ точку C прямую BD между сторонами PF и PG такъ, чтобы она въ точкѣ C раздѣлилась пополамъ (§ 198), и соединивъ точки B, C, D съ точкою A прямыми AB, AC, AD, построимъ треугольникъ ABD, въ которомъ

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{BC}^2 \text{ (§ 300) (1)}$$

Изъ треугольника же BPD, по той же теоремѣ (§ 300) слѣдуетъ, что

$$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=2\overline{PC}^2+2\overline{BC}^2 \text{ (2)}$$

Вычтя уравн. (2) изъ уравн. (1) почленно, получимъ:

$$\overline{AB}^2-\overline{PB}^2+\overline{AD}^2-\overline{PD}^2=2\overline{AC}^2-2\overline{PC}^2 \text{ (3)}$$

Но изъ прямоуг. треуг. APB и APD слѣдуетъ, что

$$\overline{AB}^2-\overline{PB}^2=\overline{AP}^2, \text{ и } \overline{AD}^2-\overline{PD}^2=\overline{AP}^2$$

посему, подставивъ въ уравн. (3) равныя величины вмѣсто равныхъ, будемъ имѣть:

$$\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=2\overline{AC}^2-2\overline{PC}^2$$
$$\text{или } 2\overline{AP}^2=2\overline{AC}^2-2\overline{PC}^2$$
$$\text{или } \overline{AP}^2=\overline{AC}^2-\overline{PC}^2$$
$$\text{откуда } \overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{PC}^2$$

И такъ треуг. APC также прямоугольный, и AC есть гипотенуза; слѣд. уголъ APC прямой; изъ сего же выводится, что AP перпендикулярна къ PC, а посему и къ плоскости NM.

371. *Изъ точки* P (черт. 187), *взятой на плоскости* MN, *можно къ плоскости возставить только одинъ перпендикуляръ* AP.

Положимъ, что сверхъ PA можно провести еще перпендикуляръ PQ къ той же плоскости, и изъ той же точки P. Вообразимъ себѣ плоскость APRQ проходящую чрезъ линіи AP и QP, и которая пересѣкла бы плоскость MN въ прямой PR. Если допустимъ, что прямыя AP и QP перпендикулярны къ MN, то должно вмѣстѣ съ тѣмъ допустить, что AP и QP перпендикулярны къ прямой PR, проходящей чрезъ точку пересѣченія R,—что противорѣчитъ прежде доказанному предложенію (§ 42). А изъ сего слѣдуетъ, что сдѣланное предположеніе не можетъ имѣть мѣста.

372. Также *изъ точки* A, *взятой внѣ данной плоскости* NM (черт. 188), *можно къ данной плоскости опустить только одинъ перпендикуляръ* AB.

Положимъ, что кромѣ AB можно бы было провести еще другую перпендикулярную къ плоскости NM прямую AD. Чтобы это опровергнуть, представимъ себѣ, что чрезъ прямыя AB и AD проведена плоскость, и пусть ея общее пересѣченіе съ плоскостью NM будетъ прямая BD; то въ такомъ случаѣ можно бы было построить треугольникъ ABD, въ которомъ AB и AD были бы перпендикулярны къ одной и той же прямой BD. Но этого быть не можетъ; а посему и нельзя изъ одной точки провести двухъ перпендикуляровъ къ одной и той же плоскости.

Точка B, въ которой перпендикулярная AB пересѣкаетъ плоскость NM, называется ея *основаніемъ*.

373. *Если изъ точки* A, *взятой внѣ плоскости* MN (черт. 189), *проведутся къ плоскости перпендикулярная и нѣсколько наклонныхъ, то:* I, *перпендикулярная короче всѣхъ наклонныхъ;* II, *наклонныя, равноудаляющіяся отъ основанія перпендикуляра, равны;* III, *изъ неравноудаляющихся та длиннѣе, которая далѣе отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.*

I. Пусть AP перпендикулярна, а AE наклонна къ плоскости MN. Проведя чрезъ нихъ плоскость APE убѣдимся, что AP<AE, потому что (§ 44) AP перпендикулярна, AE наклонна къ одной и той же линіи, и проведены изъ одной и той же точки A.

II. Пусть AE и AF наклонныя, равноудаляющіяся отъ основанія перпендикуляра, то есть PE=PF. Очевидно, что треугольники APE и APF равны (§ 57); а изъ ихъ равенства слѣдуетъ, что AE=AF.

III. Пусть AB наклонная прямая, далѣе отстоящая отъ перпендикуляра нежели AE, то есть пусть PB>PE. Отложивъ на PB прямую PC=PE, и соединивъ C и A прямою, построимъ прямую AC равную AE (§ 373. II); прямая же AB>AC (по § 45); слѣд. и AB>AE.

374. Слѣдствіе. Такъ какъ перпендикуляръ AP короче всѣхъ прямыхъ, которыя могутъ быть проведены между точкою A и плоскостью MN, то имъ и опредѣляется разстояніе между точкою A и плоскостью MN.

375. *Если* (черт. 190) *изъ основанія* P *перпендикуляра* AP *проведется прямая* PB *перпендикулярно къ линіи* EG, *произвольно проведенной въ той же плоскости* MN, *и если точка пересѣченія* B *соединится съ какою нибудь точкою* A *даннаго перпендикуляра* AP, *прямою* AB, *то эта послѣдняя будетъ перпендикулярна къ* EG.

Отложимъ на прямой EG, по обѣ стороны точки пересѣченія B, равныя части BC и BD, и соединивъ P съ точками C и D прямыми PC и PD, которыя должны быть равны между собою, какъ наклонныя равноудаляющіяся отъ основанія перпендикуляра. Соединивъ точку A съ C и D прямыми AD и AC, получимъ также равныя линіи (§ 373. II). Изъ того же, что AC=AD, AB=AB, BD=BC слѣдуетъ равенство треугольниковъ

и угловъ ABC и ABD. Если же $\angle ABC = \angle ABD$, то прямая AB перпендикулярна къ DC или EG.

376. Слѣдствіе 1. Такъ какъ AB перпендикулярна къ DC, то и DC перпендикулярна къ AB. Сверхъ сего DC перпендикулярна и къ BP; слѣд. она перпендикулярна къ двумъ прямымъ BA и BP, проведеннымъ въ плоскости ABP чрезъ точку пересѣченія B, и посему DC перпендикулярна и къ самой плоскости ABP.

377. Слѣдствіе 2. Прямая PB короче PC (§ 45), а PC короче AC, слѣд. $PB < AC$. Подобнымъ образомъ можно доказать, что PB перпендикулярная какъ къ прямой AP, такъ и къ DC, короче всякой прямой, проведенной между линіями AP и CD, и посему принимается за разстояніе между ними.

378. *Если* (черт. 191) *прямая* AP *перпендикулярна къ плоскости* MN, *то всякая прямая* BC *параллельная прямой* AP, *также перпендикулярна къ той же плоскости* MN.

Чтобы въ этомъ убѣдиться, проведемъ чрезъ AP и параллельную къ ней BC плоскость ABCP, пересѣкающую данную плоскость въ прямой PC. Прямая AP, перпендикулярная къ плоскости MN, должна быть перпендикулярна и къ PC; прямая BC, по причинѣ параллельности съ прямою AP, должна быть также перпендикулярна къ прямой PC. Если теперь докажемъ, что BC перпендикулярна еще къ другой прямой, проведенной чрезъ точку пересѣченія C, то вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ требуемое. Проведемъ чрезъ C прямую DE перпендикулярно къ PC въ плоскости MN. Эта прямая (§ 376) перпендикулярна къ плоскости APC или APCB, а посему перпендикулярна и къ BC, проведенной въ точкѣ пересѣченія C въ той же плоскости. Изъ сего же слѣдуетъ, обратно, что BC перпендикулярна къ DE. И такъ прямая BC перпендикулярна къ DE и CP, проходящимъ чрезъ ея основаніе; слѣд. перпендикулярна и къ плоскости MN (§ 370).

379. Изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ обратное: *если* AP и BC *перпендикулярны къ одной и той же плоскости, то онѣ должны быть параллельны между собою* (черт. 172).

Въ самомъ дѣлѣ, если BC не параллельна AP, то можно провести чрезъ точку C прямую CF, которая была бы параллельна AP; но прямая CF (§ 378) была бы перпендикулярна къ плоскости MN, и посему мы имѣли бы двѣ прямыя BC и FC, проведенныя перпендикулярно къ плоскости MN изъ одной точки C. Но какъ этого быть не можетъ (§ 371) то посему и предположеніе, что BC параллельна AP, не можетъ быть допущено.

380. *Если изъ трехъ прямыхъ* (черт. 193) AG, BH, CI *нележащихъ въ одной плоскости, двѣ прямыя* AG *и* CI *параллельны третьей* BH, *то онѣ параллельны между собою.*

Представимъ себѣ, что плоскость MN проведена перпендикулярно къ одной изъ прямыхъ, напр. BH, и пересѣкаетъ ее въ E, то она и другія прямыя AG и CI пересѣчетъ перпендикулярно, потому что онѣ параллельны BH (§ 378). Если же AG и CI перпендикулярны къ одной плоскости MN, то онѣ должны быть параллельны (§ 379).

381. *Если прямая* CD (черт. 194) *параллельна прямой* AB, *проведенной на плоскости* MN, *то она параллельна и къ самой плоскости* MN.

Прямыя CD и AB опредѣляютъ положеніе плоскости, въ которой находится прямая CD. Какъ бы ее не продолжали, она должна остаться въ этой плоскости; и посему если-бъ она могла пересѣчь плоскость MN, то это могло бъ быть только въ какой нибудь точкѣ общаго сѣченія плоскостей CDBA и MN, то есть, прямой AB. Но это противорѣчитъ сдѣланному условію, слѣд. прямая CD не можетъ пересѣчь плоскости MN, то есть она параллельна къ ней.

382. *Двѣ плоскости* (черт. 195) MN и PQ, *перпендикулярныя къ одной прямой* AB, *параллельны.*

Доказательство косвенное. Если плоскости NM и PQ непараллельны, то онѣ должны встрѣтиться. Пусть онѣ пересѣкаются въ прямой CD. Соединивъ какую нибудь точку E, взятую на CD, съ точками A и B прямыми EA, EB, мы составили бы треуг. EAB, въ которомъ углы EAB и EBA были бы прямые (§ 370), что противно прежде доказаннымъ предложеніямъ (§ 106): посему и предложеніе, что плоскости NM и PQ непараллельны, несправедливо.

383. *Если же двѣ плоскости* MN *и* MS (черт. 196) *перпендикулярны къ прямой* AP *въ одной и той же точкѣ, то онѣ должны совпадать.*

Чтобы въ этомъ убѣдиться, проведемъ плоскость чрезъ прямую AP, и пусть она пересѣкаетъ MN въ прямой PQ, а плоскость MS въ прямой PR. Такъ какъ AP, по условію перпендикулярна къ плоскостямъ MN и MS, то она должна быть перпендикулярна и къ прямымъ PQ и PR, проведеннымъ чрезъ ея основаніе. И такъ, при этомъ предположеніи мы имѣли бы въ одной плоскости AR два перпендикуляра QP и RP, проведенные къ одной прямой AP изъ одной и той же точки P. Но какъ сего быть не можетъ, то и сдѣланное предположеніе, что чрезъ точку P проведены двѣ различныя плоскости перпендикулярно къ прямой AP, не можетъ быть допущено.

384. *Пересѣченія* AB *и* CD (черт. 197) *двухъ параллельныхъ плоскостей* MN *и* PQ *третьею* RS, *также параллельны.*

Если AB, CD были бы непараллельны, то онѣ бы пересѣклись, и какъ онѣ находятся на плоскостяхъ MN и PQ, то точка ихъ пересѣченія на-

ходилась бы на обѣихъ плоскостяхъ, слѣд. обѣ плоскости въ такомъ случаѣ пересѣкались бы въ какой нибудь прямой, на которой должна находиться эта точка. А какъ это противорѣчитъ условію, то и прямыя AB и CD не могутъ пересѣкаться, и посему должны быть параллельны.

385. *Прямая* AB (черт. 198), *перпендикулярная къ плоскости* MN, *перпендикулярна и къ плоскости* PQ, *параллельной къ* MN.

По условію BA перпендикулярна къ плоскости MN, слѣд. она перпендикулярна къ прямымъ AC и AD, проведеннымъ чрезъ ея основаніе на плоскости MN. Вообразимъ теперь плоскость, проходящую чрезъ прямыя AD и AB, и пусть эта плоскость, пересѣкаетъ плоскость PQ въ прямой BE, то прямая BE (§ 384) должна быть параллельна AB, и какъ прямая BA перпендикулярна къ AD, то она должна быть перпендикулярна и къ ея параллельной BE. Точно такимъ же образомъ докажемъ, проведя плоскость чрезъ AC и AB, что прямая BA перпендикулярна и къ прямой BF. Если же прямая BA къ прямымъ BF и BE, проведеннымъ чрезъ точку пересѣченія B на плоскости, то она перпендикулярна и къ самой плоскости PQ.

386. *Параллельныя прямыя* AB *и* CD (черт. 199), *содержащіяся между параллельными плоскостями* MN *и* PQ, *равны.*

Такъ какъ прямыя AB и CD параллельны, то чрезъ нихъ можно провести плоскость ABDC. Пусть она пересѣкаетъ параллельныя плоскости MN и PQ въ прямыхъ AC и BD, которыя должны быть также параллельны. Если же параллельныя линіи AB и CD лежатъ между парал. AC и BD, то онѣ равны.

387. Изъ § 379 слѣдуетъ, что если прямыя BA, ED, FC (черт. 198) перпендикулярны къ плоскости MN, то онѣ параллельны между собою. Если же плоскости MN и PQ параллельны, то (386) прямыя BA, ED, FC должны быть и равны. И такъ, *параллельныя плоскости* MN *и* PQ *во всѣхъ точкахъ равно отстоятъ* одна отъ другой, потому что разстоянія, опредѣляемыя перпендикулярами, вездѣ равны.

388. На параллельности прямыхъ, въ разныхъ плоскостяхъ находящихся, основываются слѣдующія теоремы:

Если два линейные угла FDE и BAC (черт. 200), *лежащіе въ разныхъ плоскостяхъ* MN и PQ, *составлены параллельными прямыми, и отверстія угловъ обращены въ одну сторону, то* I. *углы равны, и* II. *плоскости параллельны.*

I. Для доказательства сдѣлаемъ стороны угловъ равными, то есть, DF=AB, DE=AC, и соединимъ E съ C прямою EC, а F и B прямою FB. Такъ какъ DE равна и параллельна AC, то изъ того слѣдуетъ (§ 102), что EC равна и параллельна DA. Подобнымъ образомъ докажемъ, что и FB равна и парал. DA. А изъ сего слѣдуетъ, что и EC равна и парал. FB. Изъ параллельности же и равенства прямыхъ FC и FB слѣдуетъ равенство и параллельность прямыхъ EF и BC. Слѣдствіемъ этого равенства будетъ равенство треугольниковъ FDE и BAC (§ 54); если же треугольники равны, то $\angle FDE = \angle BAC$.

II. Если положимъ, что плоскость PQ непараллельна MN, то можно провести черезъ точку D другую плоскость, которая была бы параллельна MN; и пусть эта предполагаемая параллельная плоскость пересѣкаетъ прямыя EC и FB, въ точкахъ M и O. Въ такомъ случаѣ прямая DA была бы равна MC и OB; но въ предъидущемъ параграфѣ мы видѣли, что AD=EC=BF; слѣд. MC=EC, OB=FB, то есть часть была бы равна своему цѣлому. А какъ послѣдній выводъ невозможенъ, то и предположеніе, что плоскость PQ непараллельна плоскости MN, не можетъ имѣть мѣста.

389. Изъ послѣдней теоремы слѣдуетъ, что *если три прямыя* DE, FD, FE (черт. 200), *лежащія въ одной плоскости* PQ *и составляющія треуг.* DFE *равны и параллельны порознь тремъ прямымъ* AC, AB, BC, *лежащимъ въ другой плоскости и составляющихъ треуг.* ABC *то треугольники равны и плоскости ихъ параллельны.*

Въ самомъ дѣлѣ, сдѣлавъ подобное построеніе какъ и въ предъидущемъ параграфѣ, легко убѣдимся, что прямыя DA, EC, FB, соединяющія концы данныхъ прямыхъ, равны между собою и параллельны, потому что лежатъ между равными и параллельными линіями. Изъ равенства и параллельности прямыхъ DA, EC, FB можно вывесть, какъ показано въ предъидущемъ параграфѣ, параллельность плоскостей PQ и MN. Равенство же треуг. DFE и ABC слѣдуетъ изъ того, что три стороны одного равны порознь тремъ сторонамъ другаго.

390. *Двѣ прямыя* (черт. 201) FA и GB, *лежащія въ разныхъ плоскостяхъ и заключающіяся между двумя параллельными плоскостями* RS *и* MN, *разсѣкаются плоскостью* PQ *параллельною первымъ двумъ, на части пропорціональныя.*

Чтобы доказать требуемое, проведемъ плоскости FAB и GFB чрезъ точки F, A, B и точки G, F, B. Первая плоскость разсѣчетъ плоскость PQ въ прямой CD, а плоскость MN въ прямой AB, параллельной прямой CD (§ 384); по той же причинѣ сѣченіе DE параллельно сѣченію FG.

Изъ треуг. FAB, въ которомъ DC парал. AB, выводится:

$$FC : CA = FD : DB \quad (1)$$

Изъ треуг. BFG, въ которомъ DE парал. FG, слѣдуетъ:

$$FD : DB = GE : EB \quad (2)$$

Изъ двухъ же пропорцій выводится, что

$$FC : CA = GE : EB$$

что и доказать надлежало.

II. О плоскостныхъ углахъ.

391. Мы видѣли, что отъ пересѣченія двухъ прямыхъ образуется прямолинейный уголъ. Такимъ же образомъ и плоскости своимъ пересѣченіемъ составляютъ углы, которые называются *плоскостными* или *двугранными*, потому что плоскости, образующія уголъ, называются гранями, и для построенія угла потребно двѣ плоскости. Подъ плоскостнымъ угломъ разумѣется неопредѣленное пространство, содержащееся между двумя пересѣкающимися плоскостями.

Выше было объяснено, что углы линейные не измѣняются отъ увеличиванія или уменьшенія ихъ сторонъ, а единственно зависятъ отъ большаго или меньшаго наклоненія сторонъ. Точно такъ и плоскостные углы не измѣняются отъ увеличиванія или уменьшенія граней, а отъ измѣненія положенія составляющихъ ихъ плоскостей.

392. Прямая AB (черт. 202) въ которой пересѣкаются плоскости или грани CAB и FAB, называется *ребромъ* угла, или *общимъ пересѣченіемъ* плоскостей. Для означенія двуграннаго угла принимаютъ четыре буквы, изъ коихъ среднія двѣ означаютъ общее пересѣченіе плоскостей, а крайнія ставятся на граняхъ, по одной на каждой. И такъ плоскостный уголъ на черт. 202 представленный, и образуемый плоскостями CAB и FAB, означается четырьмя буквами CABF;

393. Если при наложеніи одного плоскостнаго угла на другой ребра ихъ и грани совпадаютъ, то таковые плоскостные углы *равны*. Само собою разумѣется, что для равенства плоскостныхъ угловъ не требуется, чтобы грани и ребро одного угла совершенно взаимно совмѣщались съ гранями и ребромъ другаго; но только, чтобы ребра были на одной прямой, а грани на однихъ плоскостяхъ; точно такъ какъ не требуется, чтобы стороны равныхъ линейныхъ угловъ при наложеніи совершенно взаимно закрывали одна другую.

394. *Плоскостные углы* ABCD и A′B′C′D′ *равны* (черт. 203), *если равны линейные углы* MNP и M′N′P′, *составленные прямыми* MN, NP *и* M′N′, N′P′, *проведенными на граняхъ угловъ перпендикулярно къ общимъ пересѣченіямъ* BC и B′C′ *изъ точекъ* N *и* N′ *произвольно взятыхъ на нихъ.*

Представимъ себѣ, что плоскостный уголъ ABCD нанесенъ на плоскостный уголъ A′B′C′D′ такъ, чтобы грань ABC находилась на грани A′B′C′ и ребро BC на B′C′, и притомъ, чтобы точка N упала въ N′; то, по равенству прямыхъ угловъ BNM и B′N′M′, прямая MN совпадетъ съ N′M′.

Такъ какъ NM и NP перпендикулярны къ BC, то изъ того слѣдуетъ, что BC перпендикул. къ плоскости MNP. По той же причинѣ и B′C′ перпендик. къ плоскости N′M′P′. А изъ перпендикулярности этихъ плоскостей къ BC и B′C′ слѣдуетъ, что при совпаденіи прямыхъ BC и B′C′ и тотчасъ N и N′, совпадутъ и плоскости NMP и N′M′P′; а изъ этого выводится, такъ какъ NM совпадетъ съ N′M′ и по условію $\angle MNP = \angle M'N'P'$ то и прямая NP совпадетъ съ N′P′. Теперь не трудно убѣдиться, что и плоскость BCD будетъ находиться на плоскости B′C′D′, потому что обѣ плоскости проведены чрезъ однѣ и тѣже двѣ пересѣкающіяся прямыя B′C′ и N′P′. Если же плоскости BCD и B′C′D′ совпадаютъ, то углы плоскостные ABCD и A′B′C′D′ равны, потому что обѣ грани и общее ихъ пересѣченіе перваго, совпадаютъ съ обѣими гранями и ребромъ втораго.

395. Чтобы опредѣлить величину плоскостнаго угла, слѣдовало бы опредѣлить его отношеніе къ другому плоскостному углу, принимаемому за единицу, наприм. къ углу, составляемому двумя взаимно перпендикулярными плоскостями. Но какъ это не совсѣмъ удобно, то и принятъ способъ, сходный съ тѣмъ, который намъ уже извѣстенъ для измѣренія линейныхъ угловъ. Въ предъидущемъ параграфѣ мы видѣли, что величина плоскостныхъ угловъ находится въ зависимости отъ линейнаго угла, составленнаго перпендикулярными прямыми, проведенными изъ какой нибудь точки общаго пересѣченія къ самому пересѣченію въ обѣихъ плоскостяхъ. Этотъ уголъ MNP (черт. 203) и принимается за мѣру плоскостнаго угла.

396. Чтобы доказать справедливость этого способа должно вывести во 1-хъ, *что мѣра эта постоянна, то есть, что уголъ* EFG (черт. 204) *не измѣняется, изъ какой бы точки общаго пересѣченія ни были-бъ проведены перпендикуляры, его составляющіе.*

Въ самомъ дѣлѣ (черт. 204), пусть изъ двухъ какихъ нибудь точекъ F и F′, общаго пересѣченія BC, проведены перпендикуляры въ обѣихъ граняхъ FE, FG и F′E′, F′G′ къ общему пересѣченію BC. Прямыя FE и F′E′ параллельны, потому что перпендикуляры къ одной и той же прямой BC; по той же причинѣ и FG параллельна F′G′. И такъ углы EFG и E′F′G′, составленные параллельными прямыми, равны (§ 388).

397. Во вторыхъ, должно доказать, что линейный уголъ EFG увеличивается и уменьшается въ томъ же отношеніи, въ какомъ увеличивается и уменьшается плоскостный уголъ ABGD или другими словами, *плоскостные углы относятся между собою такъ, какъ линейные, означеннымъ образомъ построенные.*

Въ самомъ дѣлѣ пусть (черт. 205) будутъ даны два плоскост. угла ABCD и A′B′C′D′, и пусть грани ихъ прямоугольны и между собою равны, такъ что BA=BF=B′A′=B′F′, и посему можно описать дуги AF, A′F′. Сверхъ сего положимъ, что AB, FB, EC, DC перпендикулярны къ BC и A′B′, F′B′, E′C′, D′C′ перпендикулярны къ B′C′. И такъ ABF и

A'B'F' суть тѣ линейные углы, которые принимаются за мѣру плоскостныхъ угловъ ABCD, A'B'C'D', и посему какъ выше сказано, должно еще доказать, что они относятся какъ плоскостные углы.

Здѣсь могутъ быть два случая: *углы ABF и A'B'F' могутъ быть соизмѣримы и несоизмѣримы.*

1-й случай. Пусть углы ABF и A'B'F' соизмѣримы, и пусть они относятся между собою какъ 3 къ 4. Раздѣливъ уголъ ABF на 3, а уголъ A'B'F' на 4 части, получимъ равные углы ABG, GBH..., A'B'K' K'B'L'... Проведя плоскости чрезъ общее пересѣченіе BC и прямыя BG, BH, и потомъ чрезъ общее пересѣченіе B'C' и прямыя K'B', L'B'.... раздѣлимъ первый плоскостный уголъ ABCD на 3 плоскостныхъ угла, а второй плоскостный уголъ A'B'C'D' на четыре. Всѣ частные плоскостные углы равны между собою, потому что $\angle ABG = \angle GBH = \angle HBF = A'B'K' = K'B'L'$.... (§ 394). А изъ этого слѣдуетъ, что

плоскост. уг. ABCD : плоск. уг. A'B'C'D'=3 : 4

но и $\angle ABF : \angle A'B'F' = 3 : 4$

слѣд. плоск. уг. ABCD : пл. уг. A'B'C'D'=$\angle ABF : \angle A'B'F'$.

2-й случай доказывается точно такимъ же образомъ какъ и въ Планиметріи подобное предложеніе было доказано (§ 37), то есть косвенно.

398. И такъ линейный уголъ ABF находится точно въ такомъ же отношеніи къ плоскостному ABCD, въ какомъ находится дуга AF къ линейному углу ABF; посему-то уголъ ABF и принимается за мѣру плоскостнаго угла ABCD.

399. Такъ какъ линейные углы, служащіе мѣрою плоскостнымъ угламъ могутъ быть прямые, острые, тупые, то по сей причинѣ и плоскостные углы могутъ быть прямые, острые и тупые.

Отъ пересѣченія двухъ плоскостей также происходятъ смежные плоскостные углы, коихъ сумма равняется двумъ прямымъ. Чтобы въ этомъ увѣриться, стоитъ только провести плоскость перпендикулярную къ общему пересѣченію, тогда образуются линейные углы, которые служатъ мѣрою для плоскостныхъ. И какъ сумма этихъ линейныхъ угловъ, какъ смежныхъ, равна двумъ прямымъ, то и сумма двухъ смежныхъ плоскостныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.

400. Также не трудно доказать, что сумма всѣхъ плоскостныхъ угловъ, лежащихъ около одного общаго пересѣченія, равна четыремъ прямымъ; что углы противоположные равны; что, если двѣ параллельныя плоскости пересѣкаются третьею, то углы наклоненія плоскостей равны и проч.

401. *Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что если* (черт. 206) RS *перпендикулярна къ плоскости* MN, *то всякая плоскость* PQ, *проходящая чрезъ нее, будетъ перпендикулярна къ плоскости* MN.

Такъ какъ RS перпендикулярна къ плоскости MN, то она перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной на плоскости чрезъ ея основаніе S; слѣд. она перпендикулярна и къ общему пересѣченію PL и къ прямой ST, проведенной перпендикулярно къ общему пересѣченію. И такъ уголъ RST есть мѣра плоскостнаго угла, составляемаго плоскостями PQ и MN; слѣд. плоскостной уголъ прямой, и посему плоскость PQ перпендикулярна къ MN.

402. Такъ какъ чрезъ прямую RS можно провести безчисленное множество перпендикулярныхъ плоскостей, то изъ того слѣдуетъ, что чрезъ одну точку S, взятую на данной плоскости, можно къ ней провести безчисленное множество перпендикулярныхъ плоскостей MN.

403. Изъ § 401 слѣдуетъ, что *если плоскость* (черт. 206) PQ *перпендикулярна къ плоскости* MN, *то всякая прямая* RS, *проведенная на плоскости* PQ *перпендикулярно только къ общему сѣченію* PL *будетъ перпендикулярна и къ самой плоскости* MN.

Чтобъ убѣдиться въ этомъ предложеніи, проведемъ прямую ST перпендикулярно къ PL, то составленный уголъ RST долженъ быть прямой, потому что онъ служитъ мѣрою плоскостнаго прямаго угла (§ 398), и посему прямая RS перпендикулярна не только къ PL, но и къ ST; а посему и къ самой плоскости MN.

404. Слѣдствіе. Если плоскость PQ перпендикулярна къ плоскости MN, и если изъ точки S, общаго пересѣченія, возставится перпендикуляръ SR къ плоскости MN, то онъ долженъ находиться въ плоскости PQ. Положимъ, что онъ въ ней не находится, то въ такомъ случаѣ можнобъ было чрезъ точку S провести прямую SR', перпендикулярно къ общему пересѣченію PL, и эта прямая SR' была бы также перпендикулярна къ MN (§ 403); слѣд. мы имѣли бы два перпендикуляра къ плоскости NN, проведенные изъ одной точки S, взятой на плоскости, чего быть не можетъ (§ 372), посему и сдѣланное положеніе не имѣетъ мѣста.

405. Изъ послѣдняго же предложенія слѣдуетъ, что если (черт. 207) двѣ плоскости QP и RS перпендикулярны къ одной и той же плоскости, и изъ точки B, въ которой пересѣкаются общія пересѣченія CS и PD, возставленъ будетъ перпендикуляръ къ плоскости MN, то этотъ перпендикуляръ BA долженъ (по § 404) находиться и въ плоскостяхъ PQ и RS, то есть, сливаться съ общимъ ихъ пересѣченіемъ, или, *общее пересѣченіе двухъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ третьей также перпендикулярно къ той же плоскости.*

III. О многогранныхъ углахъ.

406. Мы видѣли, что двѣ плоскости, въ отношеніи къ ихъ положенію, могутъ быть параллельны или не параллельны; въ послѣднемъ случаѣ

онѣ пересѣкаются въ прямой, и составляютъ плоскостный уголъ. Три плоскости въ отношеніи къ ихъ положенію, могутъ быть: I, всѣ три параллельны; II, двѣ параллельны, а третья непараллельна: III, всѣ три непараллельны. Въ первомъ случаѣ не образуется никакихъ угловъ, такъ какъ параллельныя плоскости не пересѣкаются; во второмъ, третья плоскость, пересѣкая каждую изъ первыхъ двухъ въ прямыхъ линіяхъ, составляетъ съ каждою плоскостью по четыре плоскостныхъ угла.

407. Разберемъ третій случай, въ которомъ принимается, что данныя плоскости всѣ непараллельны. Двѣ непараллельныя плоскости (черт. 208) MN и PQ пересѣкаются въ прямой FG; третья же плоскость RS пересѣкаетъ плоскость MN въ прямой DE, плоскость PQ въ прямой AB, а общее ихъ пересѣченіе FG въ одной точкѣ C. И такъ всѣ три плоскости имѣютъ одну общую точку C. Неопредѣленное пространство, заключающееся между плоскостями, имѣющими одну общую точку, называется *многограннымъ* угломъ. Такихъ многогранныхъ угловъ въ разсматриваемомъ чертежѣ (черт. 208) восемь.

408. Въ предъидущемъ параграфѣ мы видѣли, что три непараллельныя плоскости пересѣкаются въ трехъ прямыхъ, имѣющихъ одну общую точку; но и большее число непараллельныхъ плоскостей можетъ пересѣкаться въ одной точкѣ. И въ такомъ случаѣ неопредѣленное пространство, заключающееся между плоскостями, называется многограннымъ угломъ. Слѣд. многогранный уголъ можетъ быть составленъ произвольнымъ числомъ плоскостей, которыя называются его *гранями*, а точка, въ которой онѣ соединяются — *вершиною*. Самые же углы получаютъ свои наименованія отъ числа граней. Прямая, въ которой пересѣкаются двѣ смежныя грани, называется *ребромъ* угла; а линейные углы, составляемые ребрами, *плоскими углами*.

409. Въ трегранномъ углѣ гранями составляются три плоскостныхъ угла, а ребрами три плоскихъ угла. Не трудно усмотрѣть, что плоскостные и плоскіе углы находятся во взаимной зависимости.

410. Докажемъ сперва, что *во всякомъ трегранномъ углѣ два плоскихъ угла болѣе третьяго.*

Плоскіе углы могутъ быть всѣ равны между собою; въ такомъ случаѣ очевидно, что каждый изъ нихъ менѣе суммы остальныхъ двухъ. Если же они всѣ неравны между собою, то одинъ изъ нихъ есть самый большій, и предложеніе состоитъ въ томъ, чтобы доказать, что таковой уголъ менѣе суммы остальныхъ двухъ. И такъ пусть (черт. 209) въ трегранномъ углѣ ECAB, плоскій уголъ CAB болѣе каждаго изъ остальныхъ двухъ CAE и EAB. Для доказательства, что онъ менѣе суммы остальныхъ двухъ нанесемъ въ углѣ CAB уголъ DAB равный углу EAB, и отложивъ DA=EA, проведемъ чрезъ точку B, произвольно взятую на

ребрѣ AB, и чрезъ точки E и D плоскость BDE, пересѣкающую ребро AC въ точкѣ C. Треугольники BAE и BAD равны (§ 57), потому что AB=AB, $\angle$BAE=BAD, по отложенію, AD=AE, по той же причинѣ; изъ равенства же треугольниковъ слѣдуетъ, что BD=BE. Изъ треуг. BCE выводится, что

$$CE+BE>CB \qquad (\S\ 52)$$

или

$$CE+BE>CD+BD,$$

откуда

$$CE>CD;$$

но если CE>CD, то по § 66, $\angle$CAE>$\angle$CAD; слѣд. прибавивъ къ обѣимъ частямъ неравенства равныя величины, получимъ:

$$\angle CAE+\angle EAB>\angle CAD+\angle DAB,$$

или $\angle$CAE+$\angle$EAB>$\angle$CAB, что и доказать требовалось.

411. Основываясь на этомъ предложеніи, можно доказать, что *во всякомъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ всегда менѣе 4-хъ прямыхъ.*

Пусть (черт. 210) SABCD данный многогранный уголъ, разсѣченный произвольно проведенною плоскостью ABCD. Изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ, что

$$\angle SBC+\angle SBA>\angle ABC$$
$$\angle SCB+\angle SCD>\angle BCD$$
$$\angle SDC+\angle SDA>\angle CDA$$
$$\angle SAD+\angle SAB>\angle DAB.$$

И такъ сумма (означимъ ее чрезъ S′) всѣхъ угловъ, лежащихъ при основаніяхъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину въ точкѣ S, болѣе суммы внутреннихъ угловъ многоугольника ABCD, равняющейся (§ 122) $2dn-4d$. Если разность между этими величинами означимъ чрезъ δ, то получимъ уравненіе:

$$S'=2dn-4d+\delta \quad (1)$$

Но сумма угловъ, лежащихъ при основаніяхъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину при S вмѣстѣ съ углами при S, то есть, сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ всѣхъ треугольниковъ равна $2d\times n$. Означивъ чрезъ s сумму угловъ при S получимъ уравненіе:

$$s+S'=2dn.$$

Вычтя изъ этого уравненія уравн. (1), получимъ

$$s=4d-\delta,$$

то есть сумма всѣхъ плоскихъ угловъ многограннаго угла менѣе четырехъ прямыхъ.

412. Изъ доказаннаго предложенія слѣдуетъ, что многогранные углы могутъ быть составлены тремя, четырьмя, пятью равносторонними треугольниками, потому что въ 1-мъ случаѣ сумма плоскихъ угловъ равна $\frac{2}{3}d\times3=2d$; во 2-мъ равна $\frac{2}{3}d\times4=2\frac{2}{3}d$; въ 3-мъ равна $\frac{2}{3}$

$p \times 5 = 3\frac{1}{3}d$. Но шестью равносторонними треугольниками многограннаго угла составить нельзя, потому что сумма плоскихъ угловъ была бы равна $\frac{2}{3}d \times 6$, или $4d$, что противорѣчитъ доказанному предложенію.

413. Точно такимъ же образомъ можно вывести, что только тремя квадратными плоскостями, и только тремя правильными пятиугольниками можно составить многогранные углы; потому что при большемъ числѣ таковыхъ граней сумма плоскихъ угловъ многограннаго угла была бы равна, или болѣе четырехъ прямыхъ. Пусть даны 4 квадрата для составленія многограннаго угла. Каждый уголъ квадрата есть прямой; слѣд. при соединеніи 4 квадратовъ въ одной точкѣ, сумма плоскихъ угловъ равнялась бы *четыремъ прямымъ*—чего быть не можетъ. Положимъ еще, что даны 4 правильныхъ пятиугольника для составленія многограннаго угла. Каждый уголъ правильнаго пятиугольника $= \frac{6}{5}d$ (§ 124); слѣд. при соединеніи 4 таковыхъ плоскостей сумма плоскихъ угловъ равнялась бы $\frac{6}{5}d \times 4$ или $4\frac{4}{5}d$—чего также быть не можетъ.

414. Также можно убѣдиться, что многограннаго угла совсѣмъ нельзя составить правильными шестиугольниками, семиугольниками, осьмиугольниками и т. д., хотя бы ихъ было взято только по три. Въ первомъ случаѣ сумма плоскихъ угловъ была бы (§ 124) равна $\frac{4}{3}d \times 3 = 4d$; во второмъ $= \frac{10}{7}d \times 3 = 4\frac{2}{7}d$; въ третьемъ $\frac{12}{8}d \times 3 = 4\frac{1}{2}d$, и т. д.

415. *Если плоскіе углы одного треграннаго угла равны порознь плоскимъ угламъ другаго, то грани, въ которыхъ лежатъ равные углы, одинакимъ образомъ наклонены одна къ другой.*

Пусть (черт. 211) $\angle BAD = \angle B'A'D'$, $\angle BA = CB'A'C'$, $\angle DAC = \angle D'A'C'$. Изъ точки B, произвольно взятой на ребрѣ AF, опустимъ перпендикуляръ BE на плоскость DAC; изъ основанія перпендикуляра E проведемъ къ ребрамъ AD и AC перпендикуляры ED и EC, и соединимъ точку B съ D и C прямыми BD и BC. Изъ § 375 слѣдуетъ, что и BD перпендикулярна къ AD; слѣд. уголъ BDE, составленный прямыми BD и ED, проведенными перпендикулярно къ общему пересѣченію, служитъ мѣрою плоскостнаго угла BDAC. Отложивъ въ другомъ трегранномъ углѣ на ребрѣ A'F' часть A'B' равную AB, сдѣлаемъ точно такое же построеніе какъ и въ первомъ. Здѣсь подобнымъ же способомъ выводится, что лин уголъ A'D'E' есть мѣра плоскостн. угла B'D'A'C', а $\angle B'C'E'$ есть мѣра плоскостнаго угла B'C'A'D'. Изъ всего же сказаннаго очевидно, что для

доказательства равенства плоскостныхъ угловъ, слѣдуетъ сперва доказать равенство линейныхъ угловъ.

Треуг. BDA и B'D'A' равны (§ 70), потому что прямой уг. BDA= прям. уг. B'D'A'; BA=B'A' и $\angle BAD = \angle B'A'D'$, по условію; изъ равенства же этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что AD=A'D' и BD=B'D'. Треугольники BCA и B'C'A' также равны, потому что прямой уг. BCA= прям. уг. B'C'A', AB=A'B', и $\angle BAC = \angle B'A'C'$; изъ ихъ равенства же слѣдуетъ, что AC=A'C', BC=B'C'.

Теперь можно доказать, что четыреуг. ADEC=A'D'E'C'. Для сего наложимъ сторону AD на A'D'; по равенству онѣ совмѣстятся; по причинѣ равенства угловъ DAC и D'A'C' сторона AC упадетъ на A'C', и съ нею совершенно совпадетъ, потому что AC=A'C'. Такъ какъ CE перпендик. къ AC, а C'E' перпендик. къ A'C', то прямая CE упадетъ на C'E'. Точно такимъ же способомъ можно убѣдиться, что и DE упадетъ на D'E'. И такъ точка E, находясь въ одно время на C'E' и на D'E', должна быть въ ихъ общемъ пересѣченіи E'. А изъ сего слѣдуетъ, что DE=D'E', а CE=C'E'.

Мы доказали, что BD=B'D', DE=D'E'; сверхъ сего прямой уголъ BED= прям. уг. B'E'D'; слѣд. (§ 71) треуг. BED=треуг. B'E'D', а изъ этого равенства слѣдуетъ, что $\angle BDE = \angle B'D'E'$. Уголъ же BDE, какъ выше уже объяснено, служитъ мѣрою плоскостн. уг. BDAC, а уголъ B'D'E' измѣряетъ плоскостн. уг. B'D'A'C' слѣд. по причинѣ равенства угловъ BDE и B'D'E' и плоскостн. углы BDAC и B'D'A'C' равны.

Такимъ же образомъ можно вывести равенство угловъ BCE и B'C'E', а посему и равенство плоскост. угловъ BCAD и B'C'A'D', которымъ они служатъ мѣрою.

416. Надобно однакожъ замѣтить, что лин. уг. BDE можетъ быть принятъ за мѣру плоскостн. угла только въ такомъ случаѣ, когда перпендикуляръ BE, падаетъ между AD и AC; если бы онъ упалъ въ другую сторону, то уголъ плоскостный былъ бы тупой, и составлялъ бы вмѣстѣ съ плоскостнымъ угломъ, который измѣряется линейнымъ угломъ BDE, два прямыхъ. Но въ такомъ случаѣ плоскостный уголъ, составляемый плоскостями B'A'D' и D'A'C' былъ бы также тупой; и составлялъ бы съ плоскостнымъ угломъ, измѣряемымъ угломъ B'D'E' также два прямыхъ. Углы же плоскостные, измѣряемые острыми углами BDE и B'D'E' были бы равны; а изъ сего слѣдуетъ, что и тупые плоскостные углы были бы также равны.

417. Такъ какъ въ двухъ трегранныхъ углахъ плоскостные углы равны, если плоскіе углы равны, то изъ сего слѣдуетъ, что они совершенно взаимно закроются, если только равные плоскіе углы одинакимъ образомъ расположены. И въ самомъ дѣлѣ пусть (черт. 211) $\angle BAD = \angle B'A'D'$ $\angle DAC = D'A'C'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$, и одинакимъ образомъ расположены

Пусть грань DAC нанесена на грань D'A'C'; то по равенству плоскостныхъ угловъ BDAC и B'D'A'C', грань BDA должна упасть на грань B'D'A', и ребро AB должно также находиться на плоскости B'D'A. По причинѣ равенства плоскостн. угловъ BCAD и B'C'A'D' грань BCA должна упасть на грань B'C'A', и ребро AB должно также находиться на плоскости B'C'A'. И такъ ребро AB, находясь въ одно время на двухъ плоскостяхъ B'D'A и B'C'A', должно непремѣнно находиться въ ихъ общемъ пересѣченіи, то есть, на ребрѣ A'B'; слѣд. всѣ грани и ребра обоихъ трегранныхъ угловъ совмѣстятся, то есть, трегранные углы равны.

418. Это совмѣщеніе бываетъ впрочемъ только въ такомъ случаѣ, когда равные плоскіе углы одинакимъ образомъ расположены въ обоихъ трегранныхъ углахъ; потому что если плоскіе углы не одинакимъ образомъ расположены, или, что все равно, если перпендикуляры BC, B'C', имѣютъ различныя положенія въ отношеніи къ гранямъ DAC и D'A'C', то совмѣщеніе трегранныхъ угловъ было бы невозможно, хотя равенство плоскостныхъ угловъ тѣхъ граней, въ коихъ находятся равные плоскіе углы, имѣетъ мѣсто. Таковые трехгранные углы, въ коихъ всѣ части, то есть, всѣ плоскостные и плоскіе углы равны, но не одинакимъ образомъ расположены, и которые по этой причинѣ не совмѣщаются, называются *симметрическими*. Это опредѣленіе относится къ многограннымъ угламъ.

419. Изъ равенства трегранныхъ угловъ, въ коихъ плоскіе углы равны, и одинакимъ образомъ расположены, слѣдуетъ, что трегранные углы совершенно опредѣляются своими плоскими углами. Для опредѣленія четырехграннаго угла недостаточно четырехъ плоскихъ угловъ, его составляющихъ. Очевидно, что плоскостные его углы могутъ измѣняться безъ всякаго измѣненія его плоскихъ угловъ. Если же прибавимъ еще одинъ плоскостной уголъ, то четырегранный уголъ совершенно будетъ опредѣленъ. Въ томъ можно убѣдиться тѣмъ, что два четырегранные угла равны, если плоскіе углы одного равны плоскимъ угламъ другаго и одинакимъ образомъ расположены, и сверхъ сего одинъ плоскостный уголъ перваго, равенъ плоскостному углу другаго, составленному гранями, содержащими равные плоскіе углы. Пусть (черт. 212) $\angle EAB = \angle E'A'B'$, $\angle BAC = B'A'C'$, $\angle CAD = \angle C'A'D'$, $\angle DAE = \angle D'A'E'$, и плоскост. уг. $EABC = E'A'B'C'$. Проведя плоскости EAC, E'A'C', раздѣлимъ каждый четырегранный уголъ на два трегранныхъ. Докажемъ сперва, что трегран. уг. AEBC равенъ трегран. углу A'E'B'C'. Для сего наложимъ грань EAB на грань E'A'B'; по равенству плоскостныхъ угловъ грань BAC упадетъ на грань B'A'C', и ребра EA и AC закроютъ ребра E'A' и A'C'; а изъ сего слѣдуетъ, что и грань EAC упадаетъ на грань E'A'C'; слѣд. трегранный уголъ $AEBC$ = трегр. углу A'E'B'C'. Изъ равенства же плоскихъ угловъ EAC и E'A'C' и другихъ плоскихъ угловъ CAD и C'A'D', DAE и D'A'E' слѣдуетъ совмѣщеніе трегранныхъ угловъ AEDC и A'E'D'C'. Изъ равенства же трегранныхъ угловъ слѣдуетъ равенство данныхъ четырегран. угловъ.

Подобнымъ же образомъ можно доказать, что пятигранные углы опредѣляются всѣми плоскими и двумя плоскостными углами. Или вообще, всякій многоугольный уголъ опредѣляется своими плоскими углами и плоскостн. углами, коихъ число тремя менѣе числа плоскихъ.

Глава II.

О МНОГОГРАННИКАХЪ.

I. О различныхъ родахъ многогранниковъ и главныхъ ихъ свойствахъ.

420. Если неопредѣленное пространство, содержащееся между гранями многограннаго угля, будетъ пересѣчено плоскостью, то это пространство будетъ ограничено со всѣхъ сторонъ; и таковое *пространство, со всѣхъ сторонъ ограниченное плоскостями, называются многогранникамъ*.

421. Такъ какъ для составленія многогран. угла нужно имѣть по крайней мѣрѣ три плоскости, то изъ того слѣдуетъ, что для построенія многогранника нужно имѣть по крайней мѣрѣ четыре плоскости; и таковой многогранникъ называется четырегранникомъ. Вообще многогранники получаютъ свои наименованія отъ числа плоскостей или граней, ихъ составляющихъ. Прямыя, въ которыхъ пересѣкаются грани также называются ребрами, какъ и въ многогранныхъ углахъ.

а) о пирамидѣ.

422. Всякій многогранникъ, въ которомъ нѣсколько треугольныхъ граней соединяются въ одной точкѣ, называемой *вершиною*, а основанія треугольниковъ находятся на одной плоскости и образуютъ прямолинейную фигуру, называется *пирамидою*. Весь многогранникъ какъ бы построенъ на прямолинейной фигурѣ, образуемой основаніями треугольниковъ. и посему эта прямолинейная фигура называется *основаніемъ* пирамиды. Перпендикуляръ, проведенный изъ вершины пирамиды къ плоскости основанія, называется *высотою*. Отъ формы основанія получаютъ пирамиды свои наименованія. И посему пирамиды бываютъ треугольныя, четыреугольныя, пятиугольныя и т. д. смотря потому, будетъ ли основаніемъ треугольникъ, четыреугольникъ, пятиугольникъ и т. д.

423. Двѣ пирамиды, или вообще, два многогранника *равны*, если всѣ грани и многогранные углы одного равны гранямъ и многограннымъ угламъ другаго, и одинакимъ образомъ расположены.

424. *Двѣ треугольныя пирамиды равны*, I. *если три грани одной пирамиды равны порознь тремъ гранямъ другой, составляющимъ*

соотвѣтственный многогранный уголъ, и одинакимъ образомъ расположены.

Пусть (черт. 213) △ABD=△A′B′D′, △ABC=△A′B′C′, и △ADC=△A′D′C′, и одинакимъ образомъ расположены. Если треугольники, составляющіе многогран. углы A и A′ равны, то и плоскіе углы многогранныхъ угловъ равны; а изъ равенства плоскихъ угловъ слѣдуетъ (§ 415) равенство плоскостныхъ угловъ, составляемыхъ треугольниками, въ коихъ равные углы, то есть, плоскостный уголъ DBAC=D′B′A′C′, BACD=B′A′C′D′ и т. д. Представимъ теперь, что пирамида ABCD положена на пирамиду A′B′C′D′ такъ чтобы треугольникъ BAC упалъ на треуг. B′A′D′, то по равенству плоскостныхъ угловъ DBAC и D′B′A′C′, треугольникъ ABD долженъ упасть на треуг. A′B′D′, и по причинѣ равенства, совершенно его закрыть. Очевидно, что и треуг. DAC совмѣстится съ треуг. D′A′C′, а треуг. BCD съ треуг. B′C′D′, потому что вершины ихъ соотвѣтсвующихъ угловъ совпадаютъ. И такъ двѣ грани, основанія и всѣ многогранные углы обѣихъ пирамидъ совершенно совпадаютъ, и посему пирамиды равны.

425. *Двѣ треугольныя пирамиды также равны*, II. *если двѣ грани* (черт. 213) DAB *и* CAB, *и составленный ими плоскостный уголъ* DBAC *равны двумъ гранямъ* D′A′B′, C′A′B′ *и плоскостному углу* D′B′A′C′.

Для доказательства нанесемъ пирамиду ABCD на пирамиду A′B′C′D′ такъ, чтобы треуг. BAC совмѣстился съ равнымъ ему треуг. B′A′C′, то по равенству плоскости. угловъ DBAC и треуг. D′B′A′C′ и грань DBA упадетъ на грань D′B′A′, и по причинѣ равенства совершенно ее закроетъ. Очевидно что и здѣсь, какъ въ предъидущемъ параграфѣ и остальныя грани совершенно совпадутъ, А изъ этого будетъ слѣдовать, что и многогран. углы должны быть порознь равны, то есть, обѣ пирамиды во всѣхъ своихъ частяхъ равны.

426. *Двѣ многоугольныя пирамиды равны, если всѣ грани (считая основаніе) одной пирамиды равны всѣмъ гранямъ другой пирамиды и одинакимъ образомъ расположены.*

Раздѣлимъ (черт. 214) каждую изъ двухъ данныхъ пирамидъ ABCDEF и A′B′C′D′E′F′ плоскостями ACF, ACE и A′C′F′, A′C′E′ на три треуг. пирамиды. Пирамиды ABCF и A′B′C′F′ равны, потому что (§ 424) △ABC=△A′B′C′, △ABF=△A′B′F′, по условію предложенія, а △BCF=△B′C′F′ потому что равные многоугольники дѣлятся на равные треугольники діагоналями, проведенными изъ вершинъ равныхъ угловъ (§ 235). Изъ равенства пирамидъ ABCF и A′B′C′F′ слѣдуетъ, что и △ACF=△A′C′F′. Если же △ACF=△A′C′F′, △AEF=△A′E′F′, △CFE=△C′F′E′ (§ 424) то и пирамида ACFE=пирам. A′C′F′E′. Точно такимъ же образомъ можно доказать равенство и остальныхъ пирамидъ. Изъ равенства же треугольныхъ пирамидъ, расположенныхъ одинакимъ образомъ, слѣдуетъ равенство многоугольныхъ пирамидъ.

427. *Если какая нибудь пирамида* (черт. 215) SABCDE *разсѣчется плоскостью abcde, параллельно основанію, то во 1-хъ, ребра, во 2-хъ высота* SO *раздѣлятся на части пропорціональныя; въ 3-хъ плоскость сѣченія abcde будетъ подобна основанію.*

I. По причинѣ параллельности плоскостей ABCDE и *abcde*, линіи ихъ сѣченія AE и *ae* третью плоскостью SAE должны быть параллельны (§ 384); слѣд. треуг. SAE подобенъ треуг *Sae*; изъ этого подобія слѣдуетъ:

$$SA : Sa = AE : ae = SE : se. \quad (1)$$

Треугольники SED, *Sed* подобны по той же причинѣ, и изъ ихъ подобія слѣдуетъ:

$$SE : Se = ED : ed = SD : Sd \quad (2)$$

Такъ какъ послѣднее отношеніе въ ряду (1) торжественно съ первымъ отношеніемъ въ ряду (2): то изъ того выводится, что

$$SA : Sa = AE : ae = SE : Se = ED : ed = SD : Sd \quad (3)$$

$$\text{И такъ } SA : Sa = SE : Se = SD : Sd, \text{ и т. д:}$$

то есть ребра SA, SE, SD и т. е. дѣлятся въ точкахъ сѣченія *a*, *e*, *d* на части пропорціональныя. Пропорціональность прочихъ реберъ выводится подобнымъ же образомъ.

II. Пусть высота SO пересѣкается плоскостью *abcde* въ точкѣ *o*. Проведя плоскость SAO чрезъ ребро SA и высоту SO, составимъ подобные треуг. SAO, *Sao*, потому что линіи сѣченія AO, *ao* параллельныхъ плоскостей съ плоскостью SAO параллельны (§ 384). Изъ подобія же треугольниковъ SAO, *Sao* выводится, что

$$SO : So = SA : Sa,$$

то есть, высота раздѣлена на части пропорціональныя съ ребромъ SA, а слѣд. и съ прочими ребрами.

III. Изъ ряда (3) равныхъ отношеній слѣдуетъ, что

$$AE : ae = ED : ed.$$

Подобнымъ образомъ можно вывести, что и прочія стороны основанія ABCDE и плоскости сѣченія *abcde* пропорціональны. Сверхъ сего ∠AED =*aed*, ∠EDC=∠*edc* и т. д., потому что стороны ихъ параллельны. Если же стороны многоугольниковъ ABCDE и *abcde* пропорціональны и углы равны, то многоугольники подобны.

428. Слѣдствіе. Пусть (черт. 215) пирамиды SABCDE и GHDE находятся въ одной плоскости, или, что все равно, обѣ пирамиды имѣютъ одну высоту. Если обѣ пирамиды разсѣчемъ плоскостью, параллельною основаніямъ, то сѣченія другихъ пирамидъ съ плоскостью, *abcde* и *hgf*, относятся между собою такъ какъ ихъ основанія.

Въ § 427 доказано, что трап. ABCDE ∞ трап. *abcde*, а △HGF ∞ *hgf*, слѣд. (§ 286):

$$\text{трап. } ABCDE : \text{трап. } abcde = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 = \overline{SA}^2 : \overline{sa}^2$$

а

$$\triangle HGF : \triangle fgh = \overline{FG}^2 : \overline{fg}^2 = \overline{SF}^2 : \overline{sf}^2$$

но SA : sa=SF : sf (§ 390), потому что сѣченія $abcde$ и hgf находятся на одной плоскости, параллельной основанію; слѣд.

$$\overline{SA^2} : \overline{sa^2} = \overline{SF^2} : \overline{sf^2}.$$

Изъ равенства же этихъ отношеній слѣдуетъ, что и

трап. ABCDE : трап. $abcde$=△HGF : △hgf.

429. Изъ послѣдней пропорціи слѣдуетъ, что если основанія обѣихъ пирамидъ ABCDE и HGF равномѣрны, то и сѣченія, параллельныя основанію $abcde$ и hgf, сдѣланныя на равныхъ разстояніяхъ отъ вершинъ, также равномѣрны.

430. Часть пирамиды, заключающаяся между основаніемъ ABCDE и плоскостію сѣченія $abcde$, называется *усѣченною пирамидою*.

431. Пирамида SABCDE (черт. 216) называется *правильною*, когда основаніе ABCDE есть правильный многоугольникъ и перпендикуляръ, опущенный изъ вершины S, падаетъ въ центръ основанія O. Изъ самаго опредѣленія правильной пирамиды слѣдуетъ, что основанія AB, BC, CD... треугольныхъ граней равны, какъ стороны правильнаго многоугольника, и прочія стороны треугольныхъ граней SA, SB, SC... какъ наклонныя прямыя равноудаленныя отъ основанія перпендикулара SO, также равны: слѣд. всѣ грани SAB, SBC, SCD... (по § 54) правильной пирамиды равны.

б) о призмѣ.

432. Разсмотримъ теперь другаго рода многогранники, коихъ грани суть параллелограмы, содержащіеся между равными и параллельными многоугольниками. Эти многоугольники называются *основаніями*, а самые многоугольники *призмами*. Перпендикулярная линія, проведенная отъ одного основанія къ другому, и опредѣляющая ихъ разстояніе, называется *высотою* (черт. 217).

433. Если ребра призмы перпендикулярны къ основаніямъ, то и грани, чрезъ нихъ проходящія (§ 401) также перпендикулярны къ основаніямъ, и въ такомъ случаѣ призма получаѣтъ названіе *прямой*. Въ противномъ случаѣ она называется *наклонною*.

434. Такъ какъ основаніями призмы могутъ быть различные многоугольники, то и призмы бываютъ различными въ этомъ отношеніи: Онѣ могутъ быть треугольныя, четыреугольныя, пятиугольныя и т. д., смотря по тому, будутъ ли ихъ основаніями треугольники, четыреугольники, пятиугольники и т. д.

435. Призма, въ которой основаніе есть параллелограмъ, называется *параллелепипедомъ*. Если грани его перпендикулярны къ основаніямъ, то онъ называется *прямымъ*; и очевидно, что въ прямомъ параллелепипедѣ грани суть прямоугольники, потому что ребра (§ 405) перпендикулярны къ основаніямъ граней. Если же сверхъ того, и основанія самихъ параллелепипедовъ суть прямоугольники, то въ такомъ случаѣ будемъ ихъ называть *прямоугольными*.

Прямоугольные параллелепипеды, имѣющіе основаніями квадраты, и грани равныя основаніямъ, называются *кубами*.

436. *Двѣ призмы равны, если три плоскости, составляющія трегранный уголъ одной призмы, равны порознь тремъ плоскостямъ другой и одинакимъ образомъ расположены.*

Пусть (черт. 217) плоскости ABCDE, FABG, FAEK, составляющія трегранный уголъ A, равны плоскостямъ $abcde$, $fabg$, $faek$, составляющимъ трегранный уголъ a, и одинакимъ образомъ расположены. Если основаніе первой призмы ABCDE будетъ нанесено на основаніе второй $abcde$, то по равенству они совпадаютъ. Изъ предположеннаго равенства очевидно, что ∠BAF=∠baf, ∠FAE=∠fae, ∠FAB=∠fab, то есть плоскіе углы трегранныхъ угловъ A и a равны и одинакимъ образомъ расположены, слѣд. и трегранные углы совмѣстятся, посему и грани FABG, FAEK упадутъ на грани $fabg$, $faek$. По взаимному же равенству, онѣ совмѣстятся, и прямая FK упадетъ на fk, FG на fg. Но какъ положеніе плоскостей совершенно опредѣляется двумя пересѣкающимися прямыми (§ 364): то изъ того слѣдуетъ, что площадь FGHIK совпадаетъ съ площадью $fghik$, и по равенству (§ 342) совершенно ее закроетъ во всѣхъ частяхъ. Не трудно увѣриться, что всѣ остальныя грани совпадутъ, потому что изъ совмѣщенія верхнихъ и нижнихъ основаній слѣдуетъ, что всѣ вершины одной призмы находятся въ вершинахъ другой.

437. Слѣдствіе. *Если данныя призмы прямыя, то онѣ равны и въ такомъ случаѣ, когда имѣютъ равныя основанія и равныя высоты.* Въ прямыхъ призмахъ ребра, какъ сѣченія двухъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ основаніямъ, также перпендикулярны къ основаніямъ; слѣд. представляютъ высоты призмъ, и посему, по условію, равны. Теперь не трудно вывесть, что плоскости первой призмы, составляющія трегранный уголъ A, равны плоскостямъ второй призмы, составляющей соотвѣтственный уголъ a. Многоуг. ABCDE=многоуг. $abcde$, по условію, FABG=$fabg$, потому что AB=ab, какъ стороны равныхъ многоугольниковъ и AG=af, какъ высоты (§ 257); подобнымъ же образомъ докажемъ, что грани FAEK, $faek$ равны; если же эти плоскости равны, то (§ 436) и призмы равны.

438. *Въ всякомъ параллелепипедѣ противолежащія грани параллельны и равны.*

По опредѣленію, во всякомъ параллелепипедѣ (черт. 218) EHGF. ADCB основанія ABCD и EFGH равны и параллельны, и стороны этихъ основаній также должны быть параллельны, потому что грани суть параллелограмы. Докажемъ, что грань ABFE параллельна и равна грани DCGH. Прямая AE || HD и AB || DC какъ противолежащія стороны параллело-

грамовъ; слѣд. и углы FAB и HDC (§ 388) равны и плоскости ихъ параллельны, то есть, грань DCGH параллельна грани ABFE; а равенство ихъ слѣдуетъ изъ равенства угловъ и сторонъ. Углы равны, потому что составлены параллельными прямыми; а стороны, потому что суть противолежащія стороны параллелограмовъ.

439. Всякая прямая HB (черт. 218), соединяющая вершины двухъ трегранныхъ, не прилежащихъ угловъ H и B, называется *діагональю многогранника.*

Во всякомъ параллелепипедѣ, если будутъ проведены двѣ діагонали, то онѣ непремѣнно взаимно пересѣкаются и дѣлятъ одна другую пополамъ.

Пусть даны двѣ діагонали HB и EC. Обѣ прямыя должны находиться на плоскости HEBC, проходящей чрезъ параллельныя прямыя EH и BC, потому что каждая изъ нихъ имѣетъ съ плоскостью двѣ общія точки (§ 367). Плоскость EHBC должна быть параллелограммомъ, по причинѣ равенства и параллельности сторонъ EH и BC, потому что каждая изъ нихъ равна и параллельна FG. Если же HEBC параллелограммъ, то прямыя HB и BC, представляющія его діагонали, должны пересѣкаться и дѣлиться пополамъ.

440. *Во всякомъ прямомъ параллелепипедѣ* (черт. 218) *плоскость* EHBC, *проведенная чрезъ два противуположныя ребра* EH и BC, *дѣлитъ параллелепипедъ на двѣ равныя треугольныя призмы.*

Во первыхъ докажемъ, что діагональная плоскость EHBC дѣлитъ данный параллелепипедъ на двѣ треугольныя призмы. Діагональная плоскость пересѣкаетъ параллельныя грани ABFE, DCGH въ прямыхъ EB и HC, которыя посему также должны быть параллельны (§ 384), и какъ онѣ находятся между параллельными прямыми EH и BC, то онѣ должны быть и равны. Теперь очевидно, что треуг. AEB=треуг. DHC и четыреуг. EHBC есть параллелограммъ; а изъ сего слѣдуетъ, что многогранникъ ABEDCH есть треугольная призма, потому что треуг. AEB и DHC равны и параллельны, а прочія плоскости ABCD, ADHE, BCHE суть параллелограммы. Точно такимъ же образомъ доказывается, что другая часть параллелепипеда EBFHCG есть также треугольная призма.

Во вторыхъ, слѣдуетъ вывести, что треугольныя призмы равны. Докажемъ, что онѣ прямыя призмы и имѣютъ равныя основанія и высоты. Въ треугольн. призмѣ DHCABE грани ADHE и ABCD перпендикулярны къ основанію ABE по положенію; а грань EBCH перпендикулярна къ нему, потому что проходитъ чрезъ BC и EH, перпендикулярныя къ основанію ABE (§ 401). И такъ всѣ три грани треуг. призмы DHCABE перпендикулярны къ основанію ABE, слѣд. призма прямая. Подобнымъ образомъ можно вывести. что и треуг. призма HGCEFB есть также прямая.

Основанія треуг. призмъ равны, потому что діагональ EB дѣлитъ параллелограмъ ABFE на два равныхъ треугольника ABE и EBF; высот же у нихъ общая. А изъ сего слѣдуетъ, что обѣ прямыя треуг. призмы равны (§ 437).

Основываясь на этомъ предложеніи можно доказать, что и

441. *Наклонный параллелепипедъ діагональною плоскостью дѣлится на двѣ равномѣрныя треугольныя призмы.*

Пусть (черт. 219) HEFGDABC данный наклонный параллелепипедъ. Чрезъ точки F и B проведемъ плоскости Fehg и Badc, перпендикулярныя къ ребру FB; онѣ пересѣкутъ грани параллелепипеда въ прямыхъ Fe, eh, hg, gF, и ихъ продолженія въ прямыхъ Ba, ad, dc, cB. Сѣченія Fehg и Bade, какъ перпендикулярныя плоскости къ одной и той же прямой, должны быть параллельны, и посему Fe || Ba, eh || ad, hg || dc... И какъ эти прямыя лежатъ между параллельными линіями FB, EA, HD, GC, то онѣ равны. А изъ ихъ равенства и равенства угловъ, ими составляемыхъ, выводится, что сѣченіе Fehg равно сѣченію Badc. Сверхъ сего легко увѣриться, что Fehg и Bahc суть параллелограммы, потому что противолежащія стороны параллельны, какъ линіи сѣченія параллельныхъ плоскостей съ третьею. Подобнымъ образомъ можно доказать, что грани FeaB, ehda, hgcd, и т. д. суть параллелограмы и притомъ перпендикулярны къ плоскости aBcd, потому что проходятъ чрезъ прямыя, перпендикулярныя къ плоскости aBcd. Изъ всего же сказаннаго выводится, что многогранникъ FehgBadc есть прямой параллелепипедъ.

Проведемъ діагональную плоскость чрезъ ребра прямаго параллелепипеда FB и hd, и мы получимъ двѣ равныя треугольн. призмы (§ 440). Та же самая

$$eFhaBd = FhgBdc \quad (1)$$

діагональная плоскость раздѣлитъ и наклонный параллелепипедъ на два многогранника FEHBAD, FHGBDC. Легко усмотрѣть изъ самаго построенія, что эти многогранники суть наклонныя треугольныя призмы. Изъ параллелограмовъ ABFE и aBFe очевидно, что AE=FB и ae=FB, а изъ двухъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что AE = ae. Отнявъ отъ обѣихъ прямыхъ общую ихъ часть Ae, получимъ, что Ee = Aa. Подобнымъ же образомъ можно вывесть Hh = Dd. Зная это, не трудно доказать, что многогран. HEeFh = многогран. DAaBd. Для сего, нанесемъ основаніе перваго ehF на основаніе втораго adB; по равенству они совмѣстятся и точка e упадетъ въ a, h въ d и F въ B. Ребра Ee и Aa, будучи перпендикулярны къ одной и той же плоскости, совпадутъ, и точка E упадетъ въ A, по причинѣ равенства прямыхъ Fe и Aa; такимъ же образомъ выведемъ, что по причинѣ равенства прямыхъ Hh и Dd, точка H упадетъ въ D. И такъ, вершины всѣхъ многогран. угловъ одного многогранника совпадаютъ съ вершинами другаго; слѣд. и грани совмѣстятся,

и посему и самые многогранники $HFeFh$ и $DAaBd$ равны во всѣхъ своихъ частяхъ. Прибавимъ къ каждому изъ нихъ многогранникъ $eFhABD$, получимъ:

$$HEeFh+eFhABD=DAaBd+eFhABD$$

или накл. призм. HEFDAB=прям. $eFhaBd$.

Подобнымъ образомъ можно доказать, что и

накл. пр. HESBDC=прям. призм. $FhgBdc$;

но (1) прям. пр. $eFhaBd$=прям. призм. $FhgBdc$,

слѣд. и накл. пр. HEFDAB=накл. призм. HFGBDC.

Здѣсь однакожъ надобно замѣтить, что объемы наклонныхъ призмъ равны, и измѣряются одинаковою величиною; но онѣ не совмѣщаются, и посему называются *равномѣрными*, а не равными.

442. *Во всякой призмѣ* (черт. 220) *площадь сѣченія abcde сдѣланнаго параллельно основанію* ABCDE, *равна площади основанія.*

Такъ какъ плоскость сѣченія $abcde$ параллельна основанію, то изъ того слѣдуетъ (§ 384), что линіи сѣченія ab, bc, cd..... съ гранями призмы должны быть параллельны сторонамъ основанія AE, BC, CD...., и какъ онѣ лежатъ между параллельными ребрами, то онѣ должны быть равны. Сверхъ того и углы abc, bcd, cde.... равны угламъ ABC, BCD, CDE.... потому что составлены параллельными линіями. А изъ равенства сторонъ и угловъ многоугольниковъ $abcde$ и ABCDE слѣдуетъ и ихъ равенство.

II. О многогранникахъ вообще и правильныхъ многогранникахъ.

443. Многогранники вообще раздѣляются на правильные и неправильные. *Правильнымъ* многогранникомъ называется такой, въ которомъ всѣ грани и всѣ многогранные углы равны: всѣ же другіе, не имѣющіе этого свойства, называются *неправильными*. Нѣкоторые изъ нихъ, имѣющіе извѣстные отличительные признаки, какъ то пирамиду и призму, мы уже разсматривали.

444. Два многогранника называются *симметрическими*, если построены на одномъ общемъ основаніи подобнымъ образомъ, одинъ надъ плоскостью основанія, а другой подъ нею, притомъ съ тѣмъ условіемъ, чтобъ вершины соотвѣтственныхъ многогранныхъ угловъ находились въ равномъ разстояніи отъ плоскости основанія, на одной прямой, перпендикулярной къ той же плоскости.

445. Докажемъ теперь, что *всякой многогранникъ можетъ быть раздѣленъ на треугольныя пирамиды или четырегранники.*

Пусть (черт. 243) будетъ данный неправильный многогранникъ FGABCDE, коего грани суть: FGCB, GCD, FGDE, FEA, FAB и ABCDE, изъ коихъ послѣдняя пусть служитъ основаніемъ. Изъ вершины котораго нибудь изъ многогранныхъ угловъ G проведемъ прямыя GE, GA, GB во всѣ вершины другихъ многогранныхъ угловъ, съ которыми она не соединена посредствомъ ребръ. Если проведется плоскость чрезъ GE и ребро AE, прямая GA будетъ находиться въ этой плоскости, потому что двѣ ея точки G и A лежатъ на ней; также на плоскости, проведенной чрезъ прямую GB и ребро AB, прямая AG будетъ находиться на ней по той же причинѣ; слѣд. GA должна быть общимъ сѣченіемъ плоскостей GAE и GAB, разсѣкающихъ многогранникъ, потому что онѣ пересѣкаются внутри его. Проведя еще плоскость GAF чрезъ прямую GA и ребро AF, раздѣлимъ данный многогранникъ на три пирамиды: 1) пятиугольн. пирам. GABCDE, коей грани суть GAB, GBC, GCD, GDE, GEA, а основаніе грань ABCDE; 2) треуг. пирам. GEFA, которой основаніе есть треугольникъ EFA, а грани GEF, GEA, GFA; 3) треуг. пирам. GFAB, въ которой основаніемъ можетъ быть принятъ треугольникъ FAB, а грани будутъ треугольники GFA, GFB, GAB. А какъ пятиугольная пирамида GABCDE можетъ быть раздѣлена (§ 426) на треугольныя пирамиды плоскостями, проведенными чрезъ вершину пирамиды и діагонали основанія, то изъ того и слѣдуетъ, что всякій многогранникъ можетъ быть раздѣленъ на треугольныя пирамиды.

446. Въ § 412 было доказано, что многогранные углы могутъ быть составлены тремя, четырьмя и пятью равносторонними треугольниками, тремя квадратами и тремя правильными пятиугольниками; и что большее число равностороннихъ треугольниковъ, квадратовъ и правильныхъ пятиугольниковъ не можетъ быть взято для составленія многограннаго угла, потому что сумма плоскихъ угловъ въ такомъ случаѣ была бы или равна или болѣе четырехъ прямыхъ угловъ, что противно прежде доказанному. Также было упомянуто, что по той же причинѣ нельзя составить многограннаго угла правильными шестиугольниками, семиугольниками и т. д.

447. Изъ сего же слѣдуетъ, что какъ въ правильныхъ многогранникахъ всѣ грани должны быть правильными фигурами, то число правильныхъ многогранниковъ должно быть ограниченное, и именно 5:

I. *Правильный четырегранникъ* (черт. 221) или тетраедръ, ограниченный четырьмя равносторонними треугольниками. Каждый многогранный уголъ составленъ тремя равносторонними треугольниками, и посему сумма его плоскихъ угловъ $\frac{2d}{3}\times 3=2d$.

II. *Правильный осьмигранникъ* (черт. 222) или октаедръ, ограниченный 8-ю равносторонними треугольниками. Каждый многогранный уголъ составленъ четырьмя равносторонними треугольниками, и посему сумма его плоскихъ угловъ$=\frac{2d}{3}\times 4=2\frac{2}{3}d$.

III. *Правильный двадцатигранникъ* (черт 223) или икосаедръ, составленный 20-ю равносторонними треугольниками. Каждый многогранный уголъ составленъ 5-ю равносторонними треугольниками, и посему сумма его плоскихъ угловъ $=\frac{2d}{3}\times5=3\frac{1}{3}\,d$.

IV. *Правильный шестигранникъ* (черт. 224) или *кубъ*, или *эксаедръ*, ограниченный 6-ю квадратами. Каждый многогранный уголъ составленъ тремя квадратами, и посему сумма его плоскихъ угловъ равна $d\times3=3d$.

V. *Правильный двѣнадцатигранникъ* (черт. 225), или *додекаедръ*, ограниченъ 12-ю правильными пятиугольниками; въ немъ каждый многогранный уголъ составленъ тремя правильными пятиугольниками, и посему сумма его плоскихъ угловъ $=\frac{6}{5}\,d\times3=\frac{3}{5}\,d$.

448. *Примѣчаніе.* Въ § 169 было изложено, что изъ правильныхъ многогранниковъ образуются таковые же многоугольники высшихъ порядковъ, называемые также звѣздообразными, если будутъ продолжены ихъ стороны, имѣющія одинаковое взаимное наклоненіе одна къ другой. Такимъ же способомъ можно строить правильные многогранники высшихъ порядковъ изъ правильныхъ многогранниковъ, о которыхъ было говорено въ предъидущемъ параграфѣ, продолжая ихъ грани до взаимнаго пересѣченія или до встрѣчи съ гранью, къ которой имѣютъ одинаковое наклоненіе.

Очевидно, что *тетраедровъ* и *эксаедровъ* высшаго порядка быть не можетъ, потому что грани, составляющія трегранные углы, сколько бы ни были продолжены, взаимно не пересѣкаются, и не встрѣчаютъ другихъ граней, исключая тѣхъ, съ которыми онѣ и безъ того смежны.

Если грани *октаедра* будутъ продолжены, то построится многогранникъ, составленный изъ двухъ взаимно пересѣкающихся тетраедровъ.

Продолженіемъ граней *додекаедра* могутъ быть построены додекаедры втораго, третьяго и четвертаго порядковъ; а изъ *икосаедра* такимъ же способомъ образуется только одинъ икосаедръ высшаго порядка.

Объ этомъ предметѣ можно читать въ сочиненіи Г. Поэнсо: Mémoire sur les polygones et les polyèdres, и въ журналѣ политехнической школы томѣ IX, тетради 16, 1813 года, статью Г. Коши: Recherches sur les polyèdres.

III. О измѣреніи поверхностей многогранниковъ.

449. Подъ поверхностію многогранниковъ должно разумѣть сумму всѣхъ граней, считая и основаніе. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ нужно бываетъ опредѣлить только сумму граней, и тогда поверхность называется боковою. Такъ, наприм., подъ боковою поверхностью призмы разумѣютъ сумму всѣхъ ея граней, не считая обоихъ основаній.

450. Очевидно, что опредѣленіе поверхностей многогранниковъ не сопряжено ни съ какими затрудненіями; стоитъ только найти отдѣльно площадь каждой грани, по правиламъ извѣстнымъ изъ Планиметріи, и потомъ, для полученія цѣлой поверхности, ихъ сложить. Такъ, наприм. если будетъ дана неправильная пирамида, то слѣдуетъ только найти площадь всѣхъ граней отдѣльно, сложить ихъ, и получимъ боковую поверхность пирамиды. Если же прибавимъ еще площадь основанія, то найдемъ всю поверхность пирамиды.

451. Если же въ данномъ многогранникѣ есть равныя грани, то боковая поверхность легче опредѣляется. Мы разсмотримъ здѣсь, какъ опредѣляются поверхности пирамидъ и призмъ.

452. *Найти поверхность правильной пирамиды* (черт. 216) SABCDE. Уже выше было доказано (§ 431), что въ правильной пирамидѣ всѣ грани равны, и что ихъ должно быть столько, сколько сторонъ въ основаніи. Пусть число сторонъ $=n$. И такъ, слѣдуетъ только найти площадь одной грани и умножить на n. Чтобъ найти площадь, наприм., треугольн. SAE, нужно основаніе AE умножить на половину высоты SH, которая называется *апоѳемою* правильной пирамиды:

$$\text{треуг. } SAE=AE\times\frac{SH}{2},$$

$$\text{и посему бок. пов. пир. } SABCDE=n\times\frac{SH}{2}.$$

но сторона AE, взятая n разъ, составляетъ периметръ основанія ABCDE; слѣд.

$$\text{бок. пов. пир. } SABCDE=\text{перим. } ABCDE\times\frac{SH}{2},$$

то есть, *боковая поверхность правильной пирамиды равна периметру основанія, умноженному на половину апоѳемы.*

453. Разсмотримъ теперь, чему равняется поверхность усѣченной, параллельно основанію, правильной пирамиды. Пусть (черт. 226) $abcd$ ABCD правильная многосторонняя пирамида, усѣченная плоскостію $abcd$ параллельно основанію. Боковая поверхность пирамиды, усѣченной параллельно основанію, состоитъ изъ равныхъ трапецій; слѣд. для опредѣленія боковой поверхности должно найти площадь одной трапеціи, напр. adDA, и умножить ее на число сторонъ n. Площадь трап. $ad\mathrm{DA}=(\mathrm{AD}+ad).\frac{h\mathrm{H}}{2}$ (§ 268):

$$\text{слѣд. бок. пов. усѣч. пир. } abcde\ ABCDE=n.(AD+ad).\frac{hH}{2},$$

$$=(n.\,AD+n.ad).\frac{hH}{2};$$

но n.AD есть периметръ основанія, $n.ad$ периметръ сѣченія $abcd$, а hH апоѳема усѣченной пирамиды; слѣд. *боковая поверхность правиль-*

ной пирамиды, усѣченной параллельно основанію, равна суммѣ периметровъ основанія и параллельнаго сѣченія, умноженной на половину апоѳемы.

454. Пусть требуется найти боковую поверхность прямой призмы FGHIKABCDE (черт. 220). Во всякой призмѣ всѣ грани суть параллелограммы и посему ребра KE, ID, HC, BG, AF равны, а въ прямой призмѣ они сверхъ того перпендикулярны къ основанію, слѣд. ихъ можно принять за высоты граней самой призмы. И такъ

$$KIDE = ED \times ID$$
$$IHCD = DC \times ID$$
$$HGBC = CB \times ID$$
$$GFAB = BA \times ID$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

И такъ бок. пов. призмы$=(EB+DC+CB+BA\ldots)\times ID$, то есть, *боковая поверхность прямой призмы равна периметру основанія, умноженному на ребро или высоту.*

455. Пусть данная призма $ABCDabcd$ (черт. 227) будетъ наклонная, и требуется найти ея поверхность.

Боковая поверхность ея состоитъ также изъ суммы площадей всѣхъ граней, но ребра въ ней не могутъ быть приняты за высоты граней. Чтобы построить высоты граней, проведемъ плоскость IHGF перпендикулярно къ одному ребру призмы, наприм. къ Dd. Такъ какъ всѣ ребра параллельны, то плоскость IHGF будетъ перпендикулярна и къ другимъ ребрамъ; а изъ сего слѣдуетъ, что и всѣ ребра перпендикулярны къ плоскости IHGF, а посему и къ линіямъ сѣченія IH, HG, GF и FI, проведеннымъ чрезъ точки пересѣченія I, H, G и F. И такъ

$$DCcd = IH \times Dd$$
$$CBbc = HG \times Dd$$
$$BAab = GF \times Dd$$
$$ADda = FI \times Dd$$

слѣд. бок. пов. накл. пр.$=(IH + HG + GF + FI) \times Dd$
$=$перим. $IHGF \times Dd$,

то есть, *боковая поверхность наклонной призмы равняется периметру сѣченія, проведеннаго перпендикулярно къ одному изъ реберъ, умноженному на ребро.*

IV. Измѣреніе объемовъ многогранниковъ:

456. Пространство, заключающееся между плоскостями, ограничивающими многогранникъ, называется его объемомъ (volume), или вмѣстимостію, когда говорится о какомъ нибудь сосудѣ. Очевидно, что два сосуда, различнаго вида, могутъ имѣть одинавую вмѣстимость; точно такъ и два

многогранника могутъ имѣть одинакій объемъ, хотя они различной формы. Такимъ образомъ мы видѣли. что (черт. 228) прямой параллелеп. EFGHABCD дѣлится діагональною плоскостью EHCB на двѣ равныя треугольн. призмы. Если мы себѣ представимъ, что треугольн. прямая призма EFBHGC приложена къ треуг. призмѣ EABHDC такъ, чтобы грань FGCB совпадала съ равною ей гранью EHDA, то обѣ прямыя треуг. призмы составятъ одну треугольн. призму ELBHKC, которой объемъ равняется объему прямаго параллелепипеда, потому что оба многогранника составлены изъ двухъ равныхъ прямыхъ треуг. призмъ; но самая призма не совпадаетъ съ параллелепипедомъ. Таковые многогранники называются *равномѣрными.*

457. Чтобы измѣрить объемъ многогранника, надобно сравнить его съ объемомъ такого многогранника, который принимается за единицу тѣлесной мѣры. и для сего нужно сперва узнать, въ какомъ отношеніи находятся прямоугольные параллелепипеды; и увидимъ, что и въ этихъ предложеніяхъ много аналогіи съ соотвѣтствующими предложеніями въ Планиметріи.

458. *Два параллелепипеда, имѣющіе одинакія основанія и одинакія высоты, равномѣрны.*

Если себѣ представить, что основаніе одного параллелепипеда положено на основаніе другаго, то они, по равенству, совпадаютъ, а верхнія основанія должны быть на одной плоскости, потому что въ противномъ случаѣ ихъ высоты не были бы равны. Однакожъ и тутъ могутъ быть два случая: I. Верхнія основанія могутъ имѣть двѣ параллельныя прямыя общими, или II. лежать между равными параллельными линіями.

I. Пусть будутъ данные параллелепипеды (черт. 229) ABCDEFGH и KLMNEFGH, имѣющіе общее основаніе EFGH; верхнія же основанія ABCD и KLMN лежатъ между однѣми и тѣми же прямыми BCKL и ADNM. Изъ самаго построенія очевидно, что треугольныя призмы ANHBKE и DGMCFL равны, потому что ихъ многогранные углы H и G составлены равными и одинакимъ образомъ расположенными гранями (именно: ABEH=DCFG, ANH=DMG, KNHE=LMGF). Если отъ цѣлаго многогранника AMGHBLFE отнимемъ равныя треуг. призмы, получимъ равные остатки, т. е. мн. AMGHBLFE—ANHBKE=AMGHBLFE—DGMCFL, или параллелепип. NKLMEFGH=ABCDEFGH.

459. II. Положимъ теперь, что данные параллелепипеды (черт. 230) EFGHIKLM и PQRSIKLM, имѣютъ общее основаніе IKLM, а верхнія ихъ основанія находятся на одной плоскости, но не между однѣми и тѣми же параллельными прямыми. Продолжимъ HE и GF до пересѣченія съ продолженными PQ и RS, и такимъ образомъ построимъ параллелограммъ ABCD равный и параллельный основанію IKLM; въ чемъ легко убѣдить-

ся, по причинѣ параллельности и равенства ихъ сторонъ. Теперь вообразимъ себѣ параллелепипедъ ABCDIKLM между плоскостями ABCD и IKLM, то этотъ будетъ, по § 458, равномѣренъ съ двумя параллелепипедами EFGHIKLM и PQRSIKLM; слѣд. данные параллелепипеды также равномѣрны между собою.

460. *Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что всякій параллелепипедъ можетъ быть превращенъ въ прямоугольный.*

Пусть будетъ данный наклонный параллелепипедъ (черт. 231) PQRSIKLM. Изъ точекъ M, L, K, I проведемъ прямыя MH, LG, KF, IF, перпендикулярно къ основанію до пересѣченія съ продолженною плоскостью верхняго основанія PQRS, и соединивъ точки пересѣченія H, G, F, E прямыми HG, GF, FE, EH, составимъ параллелограммъ GFEH=MLKI. Проведя теперь плоскости чрезъ прямыя MH и EI, EI и FK, KF и GL, GL и HM, построимъ прямой параллелепипедъ HEGFMIKL, потому что грани его, проходя чрезъ прямыя, перпендикулярныя къ основанію, также перпендикулярны къ основанію. Построенный параллелепипедъ равномѣренъ данному, потому что съ нимъ имѣетъ одинаковое основаніе и равную высоту (§ 458).

Если бы его основаніе MLKI было прямоугольникомъ, то параллелепипедъ NEFGMIKL былъ бы требуемый; изъ этого слѣдуетъ, что если параллелограммъ MLKI не есть прямоугольникъ, то его должно превратить въ прямоугольникъ. Для сего проведемъ изъ M и L прямыя MC и LD перпендикулярно къ MLдо пересѣченія съ IK въ точкахъ C и D; MLDC будетъ прямоугольникъ равномѣрный параллелограмму MLKI. Возставивъ изъ точекъ и D C перпендикуляры CA и DB до пересѣченія съ EF, и проведя плоскости чрезъ MC и HM. LD и GL, построимъ прямоуг. параллелеп. ABGHCDLM, потому что ABGH и CDLM будутъ равные прямоугольники и грани перпендикулярны къоснованіямъ. Прямоугольн. параллелеп. ABGHCDLM равномѣренъ съ прямымъпараллелеп. HEFGMIKL (по § 458), потому что общая ихъгрань HGLM можетъ быть принята за основаніе, и тогда верхнія ихъ основанія EFKI и ABDC находятся между однѣми и тѣми же параллельными линіями: а прямой параллелепипедъ равномѣренъ съ даннымъ наклоннымъ параллелепипедомъ: слѣд. прямоугольный параллелепипедъ равномѣренъ съ даннымъ.

461. *Два прямоугольныхъ параллелепипеда* (черт. 232) AG *и* MP. *имѣющіе равныя основанія* EFGH *и* NOPQ, *относятся между собою такъ, какъ ихъ высоты* AE *и* MN.

Здѣсь могутъ быть два случая: I, высоты могутъ быть соизмѣримыя. и II, несоизмѣримыя.

I. Пусть высоты AE и MN соизмѣримы и относятся между собою какъ 5 къ 2. Проведя въ первомъ параллелепипедѣ изъ точекъ дѣленія R, S, T, U плоскости параллельныя основанію, раздѣлимъ его на 5 равныхъ прямоуг. параллелеп., потому что основанія ихъ и высоты равны (§ 437). Такимъ же образомъ второй параллелепипедъ MP раздѣлится плоскостью проведенною параллельно основанію чрезъ точку дѣленія X, на два равныхъ прямоуг. параллелепипеда. Притомъ каждый изъ частныхъ параллелепипедовъ перваго даннаго параллелепипеда равенъ каждому частному параллелепипеду втораго даннаго параллелепипеда, по причинѣ равенства основаній и высотъ. А изъ сего слѣдуетъ, что

параллелеп. AG : парал. MP=5 : 2,

но и AE : MN=5 : 2,

слѣд. параллелеп. AG : парал. MP=AE : MN.

462. II. Если высоты несоизмѣримы, то это предложеніе доказывается косвеннымъ образомъ, какъ и прежде дѣлалось въ подобныхъ случаяхъ. Пусть высоты (черт. 233) BC и FG данныхъ прямоугольныхъ параллелеп. P и *p*, коихъ основанія равны, несоизмѣримы, и пусть P относится къ *p* не такъ, какъ BC къ FG, но какъ BC къ линіи. меньшей нежели FG, наприм. HG, то есть

пусть P : *p*=BC : HG (1)

Раздѣлимъ BC на такія мелкія части, которыя были бы менѣе FH; слѣд. если таковыя части будемъ отлагать на прямой GF отъ точки G, то непремѣнно покрайней мѣрѣ одна точка дѣленія упадетъ между N и F. Пусть будетъ точка O таковая точка, и прямая GO соизмѣрима съ высотою BC. Проведя чрезъ точку O плоскость параллельную основанію, построимъ прямоуг. параллелеп. MG, который съ параллелеп. P будетъ имѣть равныя основанія и соизмѣримыя высоты BC и OG; слѣд (§ 461

парал. P : парал. MG=BC : OG (2)

Такъ какъ въ пропорціяхъ (1) и (2) предъидущіе члены равны, то изъ послѣдующихъ можно было бы составить пропорцію:

p : парал. MG=HG : OG.

Но въ этой пропорціи первый членъ перваго отношенія болѣе втораго. а первый членъ втораго — менѣе втораго, чего быть не можетъ; слѣд. и сдѣланное предложеніе (1) не можетъ имѣть мѣста. Точно такимъ же образомъ докажемъ, что первый параллелепипедъ не можетъ относиться ко второму, какъ высота BC къ прямой, которая болѣе высоты FG; слѣд.

P : *p*=BC : FG.

463. *Два прямоугольные параллелепипеда* (черт. 224) AG *и* IP. *имѣющіе равныя высоты* AE *и* IX, *относятся такъ, какъ ихъ основанія.*

Отложивъ на AB часть AR = IK, проведемъ плоскость RSTU параллельную грани ADHE. Такимъ образомъ въ параллелеп. AG построится параллелепипедъ AT. который имѣетъ съ параллелеп. IP одинаковое осно-

ваніе, если въ первомъ примемъ грань ARUE, а во второмъ грань IKON за основанія; и посему (§ 461).

парал. IP : парал. AT=IL : AD (1)

Но параллелеп. AT имѣетъ съ параллелеп. AG одинаковое основаніе, если общая ихъ грань ADHE будетъ принята за ихъ основаніе; а изъ сего слѣдуетъ, что (§ 461)

парал. AT : парал. AG=AR : AB (2)

Перемноживъ пропорціи (1) и (2) почленно получимъ:

парал. IP : парал. AG=IL×AR : AD×AB;

а какъ IL×AR или IL×IK (потому что AR=IK) означаетъ площадь основанія IKML, а AD×AB площадь основанія ABCD; то изъ того можно вывесть, что данные прямоуг. параллел. относятся между собою такъ, какъ ихъ основанія.

464. *Два прямоугольные параллелепипеда* (черт. 235) P и p, *имѣющіе разныя основанія и высоты, относятся такъ какъ произведенія основаній на высоты, или какъ произведенія всѣхъ трехъ измѣреній.*

Означимъ высоту перваго параллел. P буквою H, а втораго p чрезъ h; стороны основанія перваго чрезъ A и B, а втораго чрезъ a и b: слѣд. площадь основанія перваго параллелеп. выразится чрезъ A×B, а втораго чрезъ $a \times b$. Построимъ, для сравненія, третій параллелеп. P′, который имѣлъ бы съ первымъ одно основаніе, а со вторымъ одну высоту:

слѣд. $P : P' = H : h$ (§ 461)

$P : p = A.B : a.b$ (§ 463)

перемноживъ получ. $P : p = A.B.H : a.b.h$,

или $P : p = (A.B) \times H : (a.b) \times h$, что и доказать надлежало, потому что A.B.H и $a.b.h$ означаютъ произведенія всѣхъ трехъ измѣреній прямоуг. параллелепипедовъ, а (A.B)×H и $(a.b) \times h$ произведенія изъ ихъ основаній и высотъ.

465. Положимъ, что въ прямоуг. параллелепипедѣ $a=b=h$, то въ такомъ случаѣ онъ былъ бы кубомъ, который и принимается, какъ правильнѣйшій изъ параллелепипедовъ, за единицу тѣлесной мѣры. Основываясь на послѣднемъ предложеніи можно опредѣлить, сколько разъ кубъ p заключается въ данномъ параллелеп. P, и такимъ образомъ получить понятіе объ его объемѣ. И въ самомъ дѣлѣ изъ предъидущаго слѣдуетъ, что (§ 464)

$P : p = A.B.H : a.b.h.$

или $P : p = A.B.H : a.a.a$, такъ какъ $a=b=h$;

откуда $\frac{P}{p} = \frac{A.B.H}{a.a.a}$.

или, разложивъ вторую часть уравненія на множители.

$$\frac{P}{p} = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{a} \cdot \frac{H}{a},$$

то есть, чтобъ узнать, сколько разъ единица тѣлесной мѣры p содержится въ данномъ многоуг. параллелепипедѣ, должно число, показывающее сколько разъ единица соотвѣтствующей линейной мѣры содержится въ *длинѣ*, умножить на число, показывающее сколько разъ та же единица содержится въ *ширинѣ*, и умножить еще на число, означающее, сколько разъ содержится та же самая единица въ *высотѣ*. Если въ послѣднемъ уравненіи единица тѣлесной мѣры p, и единица линейной мѣры a, какъ единицы, будутъ подразумѣваться, то получится уравненіе:

$$P = A.B.H$$

то есть, *объемъ прямоуг. параллелепипеда равняется произведенію всѣхъ трехъ его измѣреній.* Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что подъ этимъ выраженіемъ должно понимать, что не самыя линіи умножаются, а числа, выражающія ихъ отношенія къ линейной единицѣ; и произведеніе покажетъ, сколько разъ единица соотвѣтствующей тѣлесной мѣры содержится въ объемѣ даннаго прямоуг. параллелепипеда.

466. Не трудно убѣдиться въ справедливости этого вывода чрезъ дѣйствительное построеніе, если стороны прямоуг. параллелепипеда соизмѣримы. Пусть, напримѣръ (черт. 236) въ высотѣ AB параллелеп. P, 4 линейныхъ единицъ, въ длинѣ BC, 2, а въ ширинѣ BK, 3. Представимъ себѣ, что AB раздѣлена на 4 равныя части, и изъ точекъ дѣленія проведены плоскости параллельныя основанію. Онѣ раздѣлятъ данный параллелеп. на 4 прямоуг. параллелепипеда, коихъ высота равна линейной единицѣ. Раздѣливъ CB на 2 равныя части, проведемъ чрезъ точку дѣленія H плоскость параллельно грани ABK; этою плоскостью раздѣлится каждый изъ первыхъ параллелепипедовъ на 2 параллелепипеда, которыхъ посему будетъ 4×2. Высота послѣднихъ будетъ равна линейной единицѣ, а основаніе половинѣ основанія даннаго параллелепипеда. Раздѣливъ наконецъ и ширину BK на 3 равныхъ части, и проведя чрезъ точки дѣленія M и N плоскости параллельныя грани ABC, раздѣлимъ каждый изъ послѣднихъ параллелепипедовъ на 3 равныхъ прямоуг. параллелепипеда, коихъ посему будетъ 4×2×3: въ каждомъ же параллелепипедѣ высота, длина и ширина равны линейной единицѣ, то есть, каждый изъ послѣднихъ параллелепипедовъ будетъ кубомъ, коего каждое ребро равно линейной единицѣ. И такъ, данный прямоуг. параллелепипедъ будетъ состоять изъ 4×2×3 кубическихъ единицъ.

467 Такъ какъ наклонный параллелепипедъ (черт. 231) PL равномѣренъ съ прямоугольнымъ AL, то и мѣра его будетъ та же, то есть (§ 465), такъ какъ

об. параллеп. $AL = MCDL \times MH$,

то и об. параллеп. $PL = MCDL \times MH$

но $MCDL = MIKL$ (§ 256);

слѣд. об. параллеп. $PL = MIKL \times MH$,

то есть, *объемъ всякаго параллелепипеда равенъ его основанію, умноженному на его высоту, потому что* MH *есть также высота и наклоннаго параллелепипеда* PL.

468. Всякая треуг. призма EHFADB (черт. 219) равняется половинѣ параллеп. HEFGDABC (§ 441), имѣющаго туже высоту A, а основаніемъ параллелограммъ, коего половина равняется основанію призмы, слѣд. и мѣра объема треугольн. призмы равняется половинѣ мѣры объема параллелепипеда (§ 467).

параллеп. $HEFGDABC = DABC \times h$

слѣд. треуг. пр. $EHFADB = \frac{1}{2} DABC \times h$

но $\frac{1}{2} DABC =$ треуг. ABD;

слѣд. треуг. пр. $EHFADB = ABD \times h$,

то есть, *объемъ всякой треугольной призмы равняется ея основанію умноженному на высоту.*

469. Всякую многоуг. призму *abcde* ABCDE (черт. 237) можно раздѣлить діагональными плоскостями *eb*BE, *ce*CE на треуг. призмы, коихъ высота равна высотѣ данной призмѣ HG, а основанія суть треугольники ABE, EBC, ECD, на которые дѣлится основаніе данной призмы.

треуг. приз. $abeABE = ABE \times HG$ (§ 468)

треуг. приз. $ebcEBC = EBC \times HG$

треуг. приз. $ecdECD = ECD \times HG$

слѣд. мног. приз. $abcdeABCDE = (ABE + EBC + ECD) \times HG = ABCDE \times HG$,

то есть, *объемъ всякой многоугольной призмы равняется ея основанію, умноженному на высоту.*

470. Изъ послѣдняго параграфа слѣдуетъ, что объемы двухъ призмъ относятся между собою такъ, какъ произведенія основаній на высоты; и посему, если призмы имѣютъ одинаковую высоту, то онѣ относятся какъ основанія; если же имѣютъ одинаковое основаніе, то относятся такъ, какъ высоты.

471. Чтобъ можно было опредѣлять объемы пирамидъ, слѣдуетъ вывести, въ какомъ отношеніи находятся объемы призмъ къ объемамъ пирамидъ. Но для рѣшенія этого вопроса должно прежде доказать, что *треугольныя пирамиды, имѣющія одну высоту и равномѣрныя основанія, равномѣрны.*

Пусть (черт. 238) пирамиды CDEF и GKLN имѣютъ неравномѣрныя основанія DEF и KNL и равныя высоты. Раздѣлимъ которое нибудь изъ

реберъ CE первой пирамиды на нѣсколько равныхъ частей, и проведемъ чрезъ точки дѣленія E′, E″, E‴.... плоскости параллельныя основанію DEF, то сѣченія $E'e'f'$, $E''e''f''$ и т. д. будутъ треугольники, подобные основанію DEF. Проведя изъ e' и f' прямыя $e'e$ и $f'f$ парал. E′E, и соединивъ точки e и f, прямою ef, построимъ многогр. $E'e'f'Eef$, который долженъ быть треугольною призмою, потому что основанія его $E'e'f'$ и Eef равные треугольники, и всѣ грани параллелограммы. Такъ какъ эта призма вся находится внутри данной пирамиды, то будемъ называть ее *внутреннею.* Продолжимъ прямыя $E'e$ и $E'f$, до пересѣченія съ прямыми DD′ и FE′, проведенными параллельно прямой EE′ и соединивъ точки D′ и F′ прямою D′F′, образуемъ треуг. призму E′D′F′, EDF,—что также легко доказать. Такъ какъ часть послѣдней призмы находится внѣ данной пирамиды, то ее называютъ *выходящею.* Сдѣлавъ подобное построеніе и въ остальной части пирамиды, какъ показано въ чертежѣ, получимъ рядъ выходящихъ и внутреннихъ призмъ. Изъ того же чертежа очевидно, что

призм. $D'E'F'DEF - e'E'f'eEf =$ многогр. $D'e'f'F'DefF$

призм. $D''E''F''e'E'f' - e''E''f''E'F''g =$ многогр. $D''e''f''F''e'F''g$, ...

. . . .

призм. $D^{IV}CF^{IV}e'''E'''f''' =$ призм. $D^{IV}CF^{IV}e'''f'''E'''$

сложивъ и означивъ сумму выходящихъ призмъ чрезъ S′, а сумму внутреннихъ чрезъ S″, получимъ

$$S' - S'' = D'e'f'F'DefF + D''e''f''F''e'f'F''g \ldots + D^{IV}CF^{IV}e'''f'''E'''.$$

Также изъ самаго чертежа легко убѣдиться, что вторая часть равенства равняется треуг. призм. D′E′F′ HEF, слѣд.

$$S' - S'' = D'E'F'DEF = DEF \times h \quad (§ 468)$$

(означивъ чрезъ h высоту призмы D′F′E′DEF). Но какъ высота h зависитъ отъ числа частей ребра CE, и какъ это число совершенно произвольно, то изъ того и слѣдуетъ, что h можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, и посему и $DEF \times h$ можетъ быть сдѣлана также менѣе всякой произвольно взятой величины. Но какъ объемъ пирамиды (который означимъ чрезъ P), заключается между S′ и S″, то тѣмъ болѣе разность между S′ и P, P и S″, можетъ быть сдѣлана безконечно малою. Изъ чего же и заключаемъ, что P есть предѣлъ перемѣнныхъ величинъ S′ и S″.

472. Сдѣлавъ такое же построеніе и въ пирамидѣ GKNL, получимъ также рядъ выходящихъ и внутреннихъ треугольныхъ призмъ, имѣющихъ равныя высоты ($=h$), потому что полагаемъ высоты пирамидъ одинакими и число частей, на которыя раздѣлены ребра одно и тоже. И во второй пирамидѣ (объемъ которой означимъ чрезъ p) суммы какъ выходящихъ, такъ и внутреннихъ треугольныхъ призмъ имѣютъ своимъ предѣломъ самую пирамиду.

Изъ § 470 слѣдуетъ, что

$$D'E'F'DEF : K'LN'KLN' = DEF : KLN$$

$$D''E''F''e'E'f' : K''L''N''L'l'n' = e'E'f' : l'L'n' = DEF : KLN$$

. . . .

$$D^{IV}CE^{IV}e'''E'''f''' : K^{IV}GN^{IV}l'''L'''n''' = e'''E'''f''' : L'''l'''n''' = DEF : LKN$$

сложивъ, получимъ:

$$S' : s' = DEF : KLN$$

(гдѣ s' означаетъ сумму выходящихъ треуг. призмъ второй пирамиды).

Но какъ по § 248 перемѣнныя величины, относятся какъ ихъ предѣлы P и p. слѣд.

$$P : p = DEF : KLN$$

т. е. *треугольныя пирамиды, имѣющія одинаковыя высоты, относятся какъ ихъ основанія.*

Слѣд., если основанія равномѣрны, то и пирамиды равномѣрны. И такъ, *треугольныя пирамиды, имѣющія равныя высоты и равномѣрныя основанія, равномѣрны.*

473. Зная это предложеніе, весьма легко доказать, что *объемъ треугольной пирамиды* DABC (черт. 239) *равняется одной трети объема треугольной призмы* DEFABC, *имѣющей то же основаніе и ту же высоту.*

Проведя плоскость чрезъ точки D, A, B, и отнявъ отъ треуг. призмы треугольную пирамиду DABC, получимъ многогранникъ DABFE, который можно разсматривать какъ четыреугольную пирамиду, коей вершина въ D, а основаніе есть параллелограммъ ABFE. Проведя плоскость чрезъ вершину D и діагональ параллелограмма EB, раздѣлимъ четыреуг. пирамиду на двѣ треугольныя DABE и DFEB, которыя должны быть равномѣрны (§ 471), потому что имѣютъ равныя основанія AEB и FEB, и общую вершину D; слѣд. и одинакую высоту, такъ какъ основанія находятся на одной плоскости. Одна изъ двухъ равномѣрныхъ пирамидъ DBEF, по той же причинѣ (§ 471), равномѣрна данной пирамидѣ DABC, потому что въ ней можно принять грань DEF равную CAB за основаніе, и тогда вершина будетъ въ B; слѣд. и высоты будутъ одинакія, такъ какъ онѣ въ обѣихъ пирамидахъ равняются разстоянію между параллельными плоскостями. И такъ пирам. DAEB равномѣрна каждой изъ остальныхъ двухъ слѣд. всѣ три пирамиды, составляющія данную треуг. призму, равномѣрны. Изъ этого же слѣдуетъ, что данная треуг. пирамида составляетъ треть треугольной призмы, имѣющей то же основаніе и ту же высоту.

474. Слѣдствіе 1. Такъ какъ объемъ треуг. призмы (§ 468) равняется основанію, умноженному на цѣлую высоту, то изъ предъидущаго параграфа слѣдуетъ, что *объемъ треугольной пирамиды равняется основанію, умноженному на треть высоты.*

475. Слѣдствіе 2. Такъ какъ всякая многоуг. пирамида (черт. 214) ABCDEF можетъ быть раздѣлена діагональными плоскостями AFC, AEC, на треугольн. пирамиды ABCF, ACFE, ACDE, то слѣдуетъ только найти сумму объемовъ треугольныхъ пирамидъ, чтобъ опредѣлить объемъ многоугольной пирамиды. Замѣтимъ еще, что всѣ треуг. пирамиды имѣютъ высоту общую съ цѣлою пирамидою, потому что вершина у нихъ общая, а основанія ихъ находятся на плоскости основанія многоуг. пирамиды. Означивъ высоту пирамидъ чрезъ h, получимъ:

$$\text{пирамъ } ABCF = BFC \times \frac{h}{3} \text{ (§ 474)}$$

$$\text{пирам. } ACFE = CFE \times \frac{h}{3}$$

$$\text{пирам. } ACED = CED \times \frac{h}{3}$$

$$\text{слѣд. пирам. } ABCDEF = (BFC + CFE + CED)\frac{h}{3}$$

$$= ACDEF \times \frac{h}{3}$$

то есть *объемъ всякой многоугольной пирамиды равняется ея основанію, умноженному на треть высоты.*

476. *Всякая пирамида, усѣченная плоскостью параллельно основанію, равняется тремъ пирамидамъ, которыхъ высота равна высотѣ усѣченной пирамиды, и основаніемъ одной будетъ нижнее основаніе, другой верхнее основаніе, а третьей среднее пропорціональное между обоими основаніями усѣченной пирамиды.*

I. Пусть (черт. 240) пирамиды AFGE и KPQR имѣютъ одну высоту и основанія ихъ находятся на одной плоскости, то сѣченія BDC и MLN, происшедшія отъ пересѣченія плоскостью, параллельною основанію, относятся между собою какъ основанія пирамидъ (§ 428); слѣд., если положимъ, что основанія пирамидъ равномѣрны, то и сѣченія BDC и MLN также равномѣрны.

По причинѣ равномѣрности основаній данныхъ пирамидъ и равенства высотъ (§ 471).

$$\text{пир. } AFEG = \text{пир. } KPQR$$

$$\text{по той же причинѣ пир. } ABCD = \text{пир. } KLMN$$

$$\text{слѣд. пир. } AFEG - \text{пир. } ABCD = \text{пир. } KPQR - \text{пирам. } KLMN$$

$$\text{или усѣчен. пирам. } BDCFGE = \text{усѣч. пир. } LMNPQR.$$

Посему, если будетъ доказана справедливость предложенія для усѣченной треугольной пирамиды, то вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ доказана и для всякой пирамиды, усѣченной параллельно основанію.

477. II. Проведя плоскость DFE чрезъ точки D, F, E, разсѣчемъ данную пирамиду на двѣ пирамиды: 1) треугольную DFEG, и 2) четыреугольную DCBFE. Треугольная пирамида DFEG имѣетъ основаніемъ своимъ нижнее основаніе FEG усѣченной пирамиды, и вершину въ D; слѣд. высоту общую съ усѣченною пирамидою.

Проведя въ четыреугольной пирамидѣ DCBFE діагональную плоскость DFC, мы ее раздѣлимъ на двѣ треуг. пирамиды DBCF и DCFE. Принявъ въ пирамидѣ DBCF грань DBC за основаніе, то вершину ея будемъ имѣть въ точкѣ F; слѣд. эта вторая пирамида будетъ имѣть своимъ основаніемъ верхнее основаніе усѣченной пирамиды и высоту общую съ нею.

Остается теперь только разсмотрѣть остальную пирамиду DCEF. Для сего проведемъ прямую DH параллельно ребру CE, и построимъ треуг. пирамиду HCEF, которая съ пирамидою DCEF имѣетъ одно и то же основаніе CEF; вершины же ихъ D и H находятся на прямой DH, параллельной къ прямой CE, и посему параллельной къ плоскости основанія BCEF (§ 381); слѣд. высоты пирамидъ равны. А изъ равенства основаній и высотъ слѣдуетъ равномѣрность пирамидъ DCEF и HCEF. Если же въ послѣдней пирамидѣ примемъ грань FEH основаніемъ, то вершина будетъ въ C; слѣд. и третья пирамида CFEH имѣетъ высоту усѣченной пирамиды. Осталось теперь вывести, въ какомъ отношеніи находится ея основаніе FEH къ нижнему и верхнему основаніямъ данной пирамиды.

Треугольники FGE и FEH можно разсматривать какъ треугольники, имѣющіе общую вершину въ F, а основанія на одной прямой, и посему имѣющіе одну и ту же высоту; слѣд. (§ 284)

треуг. FGE : треуг. FEH = GE : EH;

поставимъ вмѣсто EH равную ей линію DC, получимъ:

треуг. FGE : треуг. FEH = GE : DC. (1)

Треугольники же FEH и BCD имѣютъ равные углы FEB и BCD и посему (§ 285)

треуг. FEH : треуг. BCD = FEH : BC×CD,

но EH = CD; слѣд. сокративъ члены втораго отношенія на EH, равную CD, получимъ:

треуг. FEH : треуг. BCD = FE : BC. (2)

Изъ подобія же треугольниковъ FGE и BDC слѣдуетъ равенство вторыхъ отношеній пропорцій (1) и (2)

GE : DC = FE : BC

слѣд. треуг. FGE : тр FEH = тр.FEH : тр. BCD,

и такъ треугольникъ FEH есть средняя пропорціональная величина между нижнимъ и верхнимъ основаніями усѣченной пирамиды, и вмѣстѣ съ симъ доказаны всѣ части предложенной теоремы.

478. *Объемъ треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію* BACDEF (черт. 241) *равняется суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ имѣющихъ тоже основаніе* DEF, *и вершины въ вершинахъ сѣченія* A, B, C.

Отсѣчемъ отъ данной призмы плоскостью ADE треугольную пирамиду ADFE, которая и будетъ одна изъ требуемыхъ, потому что ея основаніемъ служитъ основаніе призмы, а вершина въ A. Раздѣлимъ теперь оставшуюся

четыреугольную пирамиду ABCED діагональною плоскостью ACD на двѣ пирамиды ACDE и ABCD.

Пирамида ACDE равномѣрна пирамидѣ FCDE, какъ имѣющей тоже основаніе и вершину F на одной прямой, параллельной основанію. Въ пирамидѣ же FCDE можно грань FDE принять за основаніе, и тогда вершина ея будетъ въ вершинѣ сѣченія C. Слѣд. FCDE есть вторая изъ требуемыхъ пирамидъ.

Пирамида ABCD равномѣрна пирамидѣ FBDE, потому что основанія ихъ BDC и BDE суть равномѣрные треугольники, какъ имѣющіе равныя основанія и высоты; вершины же пирамидъ A и F находятся на одной прямой AF, параллельной основанію. Въ пирамидѣ же FBDE можно принять грань FDE за основаніе, и тогда вершина ея будетъ въ вершинѣ сѣченія B; слѣд. пирамида FBDE есть третья требуемая пирамида. И такъ объемъ, усѣченной непараллельно основанію треугольной призмы, равняется суммѣ объемовъ трехъ вышеозначенныхъ пирамидъ.

479. Слѣдствіе. Если ребра AF, CE и BD перпендикулярны къ основанію, то они будутъ вмѣстѣ высотами трехъ пирамидъ, составляющихъ объемъ усѣченной треугольной призмы, и посему объемъ призмы:

$$= DEF \times \frac{1}{3} AF + DEF \times \frac{1}{3} CE + DEF \times \frac{1}{3} BD$$
$$= DFE \times \frac{1}{3} (AF + CE + BD)$$

то есть, *объемъ прямой треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, равняется ея основанію, умноженному на одну* $\frac{1}{3}$ *суммы всѣхъ ребръ.*

V. О подобныхъ многогранникахъ.

480. Подобными многогранниками называются такіе, въ которыхъ многогранные углы равны, и грани подобны и одинакимъ образомъ расположенны. Мы выше (§ 445) видѣли, что многоугольники могутъ быть раздѣлены на треугольныя пирамиды; посему и слѣдуетъ разсмотрѣть случаи, въ которыхъ треугольныя пирамиды бываютъ подобны; точно такъ какъ въ Планиметріи отъ подобія треугольниковъ переходятъ къ подобію многоугольниковъ.

481. *Если въ двухъ треугольныхъ пирамидахъ* (черт. 242) ABCD, *abcd, треугольники, составляющіе соотвѣтственные трегранные углы* A *и* a, *подобны и подобнымъ образомъ расположены, то пирамиды подобны.*

По условію выраженному въ теоремѣ, пусть треугольники ABC, ABD, ADC подобны треугольникамъ *abc*, *abd*, *adc*, и притомъ расположены одинакимъ образомъ. Отложивъ на ребрѣ AB прямую AE = *ab*, проведемъ плоскость EGF параллельно основанію BDC, то построимъ пирамиду AEFG, имѣющую съ пирамидою ABCD, во 1-хъ всѣ грани подобныя, и подоб-

нымъ образомъ расположенныя, и во 2-хъ всѣ сходственные трегранные углы равные.

I. Треугольникъ AEG подобенъ треугольнику ABD, потому что EG и BD параллельны, какъ линіи сѣченія параллельныхъ плоскостей третьею (§ 384 и § 201); по той же причинѣ треугольники AEF и ABC, AGF и ADC также подобны: треугольникъ жъ EGF подобенъ треугольнику BDC, какъ плоскость сѣченія, проведенная параллельно основанію (§ 427). И такъ всѣ четыре грани пирамиды AEFG подобны гранямъ пирамиды ABCD, и также очевидно, что онѣ одинакимъ образомъ расположены.

II. Такъ какъ грани одной пирамиды подобны гранямъ другой, то изъ сего слѣдуетъ, что плоскіе углы сходственныхъ трегранныхъ угловъ равны и одинакимъ образомъ расположены; а изъ этаго равенства выводится равенство трегранныхъ угловъ. И такъ пирамида AEFG подобна пирамидѣ ABDC.

Осталось теперь только вывесть, что вторая данная пирамида *abcd* равна пирамидѣ AEFG. Изъ подобія треугольниковъ ABD и *abd* (по условію) слѣдуетъ, что $\angle ABD = \angle abd$; но $\angle ABD = \angle AEG$, слѣд. $\angle abd = \angle AEG$. Такимъ же образомъ выведемъ что и $\angle bad = \angle EAG$ Сверхъ того извѣстно, что $ab = AE$. Изъ сего же слѣдуетъ (§ 58), что треуг, $abd =$ тр. AEG. Изъ равенства этихъ треугольниковъ выводится, что $ad = AG$. Также можно доказать какъ выше было показано, что и $\angle abc = \angle AGF$, $\angle dac = GAF$, слѣд, и треугольникъ $adc = AGF$. Подобнымъ же способомъ можно вывести, что и треугольники *abc* и AEF равны. Если же три грани треугольной пирамиды *abcd*, составляющія трегранный уголъ *a* равны тремъ гранямъ другой пирамиды AEFG, составляющимъ сходственный трегранный уголъ A, одинакимъ образомъ расположены, то таковыя пирамиды равны во всѣхъ частяхъ. А изъ равенства пирамидъ *abcd* и AEFG слѣдуетъ, что и пирамида *abcd* подобна пирамидѣ ABCD, потому что также должна имѣть съ нею подобныя и подобнымъ образомъ расположенныя грани, и равные трегранные углы.

482. Подобнымъ же образомъ и такимъ же построеніемъ докажемъ, что *треугольныя пирамиды подобны и въ томъ случаѣ, когда двѣ грани одной подобны двумъ гранямъ другой, и двугранные углы, составляемые подобными гранями, равны.*

Различіе въ доказательствѣ состоитъ только въ томъ, что въ такомъ случаѣ пирамиды *abcd* и AEFG равны по причинѣ равенства двухъ граней и угла, ими составляемаго (§ 425).

483. Изъ подобія граней подобныхъ пирамидъ (черт. 242) выводятся пропорціи:

$$AB : ab = AC : ac = BC : bc$$
$$BC : bc = BD : bd = DC : dc \text{ и пр.}$$

то есть, *въ подобныхъ треуг. пирамидахъ сходственныя ребра пропорціональны.*

484. Если въ двухъ треуг. пирамидахъ всѣ ребра одной пропорціональны ребрамъ другой, и одинакимъ образомъ расположены, то всѣ грани обѣихъ пирамидъ подобны; а изъ сего подобія слѣдуетъ и подобіе пирамидъ, потому что (§ 481) достаточно, чтобы три грани, составляющія сходственные трегранные углы, были подобны и одинакимъ образомъ расположены.

485. Изъ §§ 427 и 481 также слѣдуетъ, что если въ треугольной пирамидѣ ABCD проведемъ плоскость параллельную основанію, то отсѣченная пирамида AEDG подобна цѣлой пирамидѣ.

486. *Два многогранника* (черт. 243) FGACDE, *fgabcde составленныхъ изъ равнаго числа подобныхъ и подобно расположенныхъ пирамидъ, подобны.*

Пусть пирамида GABCDE подобна *gabcde*, GAEF подобна *gaef*, GABF подобна *gabf*, и пусть онѣ одинакимъ образомъ расположены; слѣдуетъ доказать: I. что грани первой пирамиды подобны гранямъ второй; и II. сходственные плоскостные ихъ углы равны.

I. Изъ самаго чертежа видно, что грани обоихъ многогранниковъ или суть полныя грани данныхъ пирамидъ, или составлены изъ подобныхъ одинакимъ образомъ расположенныхъ граней двухъ соотвѣтственныхъ пирамидъ. Къ *первымъ* относятся многоугольники ABCDE и *abcde*, такъ какъ они суть основанія пирамидъ GABCDE *gabcde*, и расположены одинакимъ образомъ въ обоихъ многогранникахъ. Къ тому же разряду принадлежатъ ABF и *abf*, потому что суть общія и многогранникамъ и пирамидамъ GABF и *gabf*, и т. п. Ко *второму разряду* граней принадлежатъ, наприм. четыреугольники DEFG и *defg*, составленные изъ треугольниковъ DEG и GEF, *deg* и *gef*, которые суть сходственныя грани въ пирамидахъ GABCDE и GAEF, *gabcde* и *gaef*. То же самое можно сказать и о граняхъ BFGC и *bfgc*, составленныхъ изъ сходственныхъ граней BFG и BGC, *bfg* и *bgc* подобныхъ пирамидъ GABF и GABCDE, *gabf* и *gabcde*.

II. Что касается до равенства плоскостныхъ угловъ, то не трудно также увѣриться въ томъ, что нѣкоторые изъ нихъ суть общіе для многогранниковъ и двухъ подобныхъ пирамидъ, а остальные составлены изъ равнаго числа равныхъ плоскостныхъ угловъ двухъ сходственныхъ пирамидъ.

Къ *первымъ* можно наприм. отнести плоскостные углы GFEA, *gfea*, которые вмѣстѣ суть плоскостные углы многогранниковъ, и сходственные плоскостные углы подобныхъ пирамидъ GEFA и *gefa* и т. п.

Ко *вторымъ* можно причислить плоскостные углы BFAE *bfae*, составленные изъ угловъ BEAG и GFAE, *beag* и *gfae*, которые суть сходственные углы подобныхъ пирамидъ GABF и GAEF, *gabf* и *gaef*.

И такъ грани одного многогранника FGABCDE подобны гранямъ другаго *fgabcde*, и подобно расположены; сверхъ сего сходственные плос-

костные, а посему и многогранные углы обоихъ многогранниковъ равны: слѣд. многогранники подобны.

487. Обратно: *Если два многогранника* (черт. 343) FGABCDE и *fgabcde* *подобны, то они могутъ быть раздѣлены на одинакое число подобныхъ треуг. пирамидъ и одинакимъ образомъ расположенныхъ.*

Во первыхъ очевидно, что если въ подобныхъ граняхъ данныхъ многогранниковъ соединимъ вершины сходственныхъ угловъ діагоналями, то образуемъ равное число подобныхъ и подобно расположенныхъ треугольниковъ. Избравъ потомъ въ обоихъ многогранникахъ сходственные многогранные углы, наприм. G и g, проведя плоскости чрезъ прямыя, соединяющія эти вершины G и g, съ вершинами всѣхъ другихъ угловъ того же многогранника, раздѣлимъ оба многогранника на одинаковое число подобно расположенныхъ треугольныхъ пирамидъ, коихъ соотвѣтственныя основанія будутъ подобны.

Эти пирамиды могутъ быть двухъ разрядовъ:

I. Однѣ имѣютъ двѣ грани, общія съ многогранниками, и заключаютъ равные плоскостные углы самихъ многогранниковъ и посему они подобны. Къ этому разряду могутъ быть отнесены напр. пирамиды GCDE и *gcde*, коихъ грани G=C и *gdc*, G=E и *gde*, подобны какъ сходственные треугольники подобныхъ граней, и содержатъ равные плоскостные углы CG=E и *cgde* самихъ многогранниковъ.

II. Ко второму разряду причисляются тѣ треуг. пирамиды, которыя составлены сходственными гранями пирамидъ перваго разряда, и заключаютъ плоскостные углы, равные разности между равными плоскостными углами многогранниковъ и равными плоскостными углами пирамидъ перваго разряда. Къ такимъ пирамидамъ относятся напримѣръ пирамиды GAEC, *gaec*. Въ самомъ дѣлѣ, сравнивая пирамиды GC=E и *gcde*, коихъ подобіе уже доказано, находимъ, что треугольники GEC и *gec* подобны, и плоскостные углы =GCE и *dgce* равны; сравнивая треуг. пирамиды GABC, *gabc*, коихъ подобіе также уже извѣстно, выводимъ подобіе треугольниковъ ACG и *acg*, и равенство плоскостныхъ угловъ BCGA и *bcga*. Теперь, если отъ сходственныхъ равныхъ плоскостныхъ угловъ данныхъ многогранниковъ BCG= и *bcgd*, вычтемъ равныя величины, отъ перваго сумму плоскостн. угловъ DGCE+BCGA, а отъ втораго *dgce*+*bcga*, получимъ равные остатки, то есть, плоскостные углы ACGE и *acge*. И такъ треуг. пирамиды GAEC и *gaec* должны быть (по § 482) подобны. Такимъ же изслѣдованіемъ можно убѣдиться въ подобіи всѣхъ сходственныхъ пирамидъ.

488. Изъ предъидущаго параграфа слѣдуетъ, что если бы данные многогранники были не только подобны, но и равны, то они моглибъ быть разложены на одинакое число треугольныхъ *равныхъ* пирамидъ одинакимъ образомъ расположенныхъ.

489. *Ребра подобныхъ многогранниковъ* (черт. 243) *относятся между собою такъ какъ діагонали сходственныхъ граней. и діагонали многогранниковъ.*

Сравнивая послѣдовательно сходственныя грани подобныхъ пирамидъ, получимъ слѣдующія отношенія:

$$\mathrm{BC} : bc = \mathrm{BG} : bg = \mathrm{BF} : bf = \mathrm{AB} : ab = \mathrm{AC} : ac \text{ и пр.}$$

чѣмъ и доказывается самое предложеніе.

490. Поверхность многогранниковъ состоитъ изъ суммы всѣхъ граней, которыхъ площади относятся между собою, такъ какъ квадраты сходственныхъ ихъ сторонъ или ребръ многогранниковъ; а посему и *поверхности подобныхъ многогранниковъ относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ ребръ*, или вообще, какъ квадраты сходственныхъ прямыхъ, проведенныхъ въ многогранникахъ. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\text{тр. EAF} : \text{тр. } eaf = \overline{\mathrm{FE}}^2 : \overline{fe}^2$$

$$\text{тр. FAB} : \text{тр. } fab = \overline{\mathrm{AF}}^2 : \overline{af}^2 = \mathrm{FE}^2 : fe^2$$

$$\text{тр. FGB} : \text{тр. } fgb = \mathrm{FB}^2 : fb^2 = \mathrm{FE}^2 : fe^2$$

и т. д.

слѣд. пов. $\mathrm{FGABCDE}$: пов. $fgabcde = \overline{\mathrm{FE}}^2 : fe^2$.

491. *Объемы двухъ подобныхъ треугольныхъ пирамидъ относятся между собою какъ кубы сходственныхъ ребръ или другихъ сходственныхъ прямыхъ, проведенныхъ въ пирамидахъ* (черт. 242).

Изъ предъидущаго извѣстно, что (§ 283)

$$\text{тр. BDC} : \text{тр. } bdc = \overline{\mathrm{BD}}^2 : \overline{bd}^2.$$

$$\frac{1}{3}\,\mathrm{AH} : \frac{1}{3}\,ah = \mathrm{BD} : bd:$$

слѣд. $\text{тр. BDC} \times \frac{1}{3}\mathrm{AH} : \text{тр. } bdc \times \frac{1}{3}\,ah = \overline{\mathrm{BD}}^3 : \overline{bd}^3$

или об. пир. ABCD : об. пир. $abcd = \overline{\mathrm{BD}}^3 : \overline{bd}^3$.

492. Изъ послѣдняго предложенія выводится, что и объемы всѣхъ подобныхъ многогранниковъ, такъ какъ они могутъ быть разложены на одинаковое число подобныхъ треугольныхъ пирамидъ (§ 487), относятся между собою какъ кубы сходственныхъ ребръ или сходственныхъ прямыхъ въ нихъ проведенныхъ.

493. Такъ какъ грани всѣхъ правильныхъ многогранниковъ, имѣющихъ равное число граней, суть подобные многоугольники, и сверхъ того многогранные ихъ углы равны; то изъ того и слѣдуетъ, что таковые многогранники подобны. Такимъ образомъ всѣ кубы суть подобные многогранники.

Глава III.

О ТѢЛАХЪ, ОГРАНИЧЕННЫХЪ КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

I. О свойствахъ тѣлъ вращенія.

494. Многогранники могутъ быть весьма разнообразны; если же себѣ представимъ, что тѣла ограничиваются кривыми поверхностями, то ихъ разнообразіе будетъ еще больше и посему изслѣдованіе ихъ не можетъ составлять предмета элементарной Геометріи. Въ ней разсматриваются только нѣкоторыя изъ тѣлъ ограниченныхъ кривыми поверхностями, происходящихъ отъ обращенія какихъ либо фигуръ, и посему называемыхъ *тѣлами вращенія*. Изъ тѣлъ вращенія изслѣдуются въ Стереометріи преимущественно три, а именно: происходящія отъ обращенія прямоуг. треугольника и прямоугольника около одной изъ сторонъ, и отъ обращенія полукруга около своего діаметра.

495. Разсмотримъ теперь тѣло, происходящее отъ обращенія (черт. 244) прямоугольника ABC, около одного изъ катетовъ AB. При этомъ обращеніи точка A и катетъ AB останутся на своемъ мѣстѣ, катетъ BC опишетъ кругъ $CnDm$, и точка C окружность, какъ и всякая другая точка E, взятая на гипотенузѣ AC, потому что онѣ сохраняютъ одно и тоже разстояніе отъ катета AB во время всего обращенія. Таковое тѣло вращенія, имѣющее своимъ основаніемъ кругъ, и коего кривая поверхность оканчивается въ одной точкѣ, называется *конусомъ*. Точка A, въ которой оканчивается кривая поверхность, называется *вершиною*, а прямая AB, соединяющая вершину съ центромъ основанія, и около которой происходитъ обращеніе, *осью* конуса; прямая же AP *производящею* линіею, потому что отъ ея обращенія образуется поверхность конуса. Такъ какъ кривую поверхность прямаго конуса можно принять за слѣдъ непрерывно движущейся производящей, прямой AC по окружности $CnDm$, то изъ того можно заключить, что кривая поверхность конуса можетъ быть, такъ сказать, развернута на плоскости; и въ такомъ случаѣ образуетъ круговой секторъ $AC'mnC''$ (черт. 244′), котораго радіусъ AC, а дуга $C'mnC'$ окружности $CmDn$.

496. Происхожденіе поверхности конуса можно себѣ представить еще слѣдующимъ образомъ: вообразимъ, что около точки B въ плоскости перпендикулярной къ оси AB описанъ кругъ $CnDm$, и что прямая AC, оставаясь однимъ концомъ неподвижно въ A, другимъ концомъ C движется по окружности $CnDm$, пока достигнетъ опять до точки C.

Такъ какъ AB перпендикулярна къ плоскости основанія $CnDm$, то посему конусъ называется *прямымъ*.

497. Если бы прямая (черт. 245) AB была не перпендикулярна къ кругу $CnDm$, тогда бы точка A не находилась бы въ равномъ разстояніи отъ всѣхъ точекъ окружности; слѣд. въ такомъ случаѣ прямая AC, оставаясь неподвижною въ A, не могла бы другимъ своимъ концомъ C двигаться по окружности A, а, такъ сказать, скользила бы по ней и описала бы также кривую поверхность конуса. Но какъ прямая AB, соединяющая вершину A съ центромъ основанія B будетъ наклонна къ плоскости основанія, то и конусъ называется въ такомъ случаѣ *наклоннымъ*.

498. *Во всякомъ конусѣ* (черт. 245) *сѣченіе* EFGH, *сдѣланное параллельно основанію* $CnDm$, *есть кругъ*.

Проведя плоскость чрезъ точки A, B, C, получимъ параллельныя сѣченія CB и EI, по причинѣ параллельности плоскостей $CnDm$ и EFG, проведя еще одну плоскость чрезъ точки A, B и произвольно взятую точку n на окружности основанія, построимъ также двѣ параллельныя линіи сѣченія Bn, IF. По причинѣ параллельности прямыхъ CB и EI имѣемъ:

$$AB : AI = CB : FI \quad (1);$$

а по причинѣ параллельности Bn и FI;

$$AB : AI = Bn : FI \quad (2)$$

Такъ какъ первые три члена первой пропорціи равны первымъ тремъ соотвѣтствующимъ членамъ второй (потому что $CB = Bn$, какъ радіусы одного круга), то и четвертые члены равны, то есть $EI = FI$. И такъ точка F въ такомъ же разстояніи отъ I какъ и точка E. Такимъ же образомъ можно доказать, что и всѣ другія точки сѣченія G, H.... находятся въ равномъ разстояніи отъ I; слѣд. сѣченіе EFGH должно быть кругомъ.

499. Изъ самаго происхожденія конуса слѣдуетъ, что всякое сѣченіе ABC, сдѣланное по оси, должно быть треугольникомъ.

500. Перейдемъ теперь къ другому тѣлу вращенія, разсматриваемому въ элементарной Геометріи. Пусть (черт. 246) прямоугольникъ ABCD обращается около одной изъ своихъ сторонъ AB, то стороны BC и AD, по причинѣ ихъ параллельности и равенства, опишутъ параллельные и равные круги $CmFn$ и DnE, а сторона CD кривую поверхность, ограничиваемую обоими кругами. Тѣло вращенія, такимъ образомъ происшедшее, называется *цилиндромъ*, дуги DnE и CmF его верхнимъ и нижнимъ *основаніями*, прямая AB, соединяющая центры обоихъ круговъ

его *осью*, а поверхность отъ прямой CD происшедшая, его *кривою* или *боковою* поверхностью. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что кривая поверхность прямаго цилиндра можетъ быть развернута въ прямоугольникъ, котораго основаніе и высота равны основанію и высотѣ даннаго цилиндра.

501. Происхожденіе кривой поверхности цилиндра можно себѣ представить еще слѣдующимъ образомъ: если вообразимъ себѣ, что прямая CD двигается по окружности нижняго основанія, сохраняя къ нему свое перпендикулярное положеніе.

502. Такъ какъ ось AB перпендикулярна къ плоскости нижняго или верхняго основанія, то посему таковой цилиндръ называется *прямымъ*.

503. Представимъ теперь себѣ (черт, 247) два параллельныхъ равныхъ круга D*n*E и CF*m*, имѣющихъ притомъ такое положеніе, что прямая AB, соединяющая центры обоихъ круговъ, къ нимъ наклонна; то прямая CD двигаясь по обѣимъ окружностямъ и сохраняя вездѣ параллельность свою къ прямой AB, опишетъ также поверхность цилиндра; и самое тѣло, ограничиваемое этою поверхностью и обоими кругами будетъ также цилиндръ, но *цилиндръ наклонный*, такъ какъ прямая соединяющая центры обоихъ основаній, или *ось*, наклонна къ основаніямъ.

504. Не трудно убѣдиться, что изъ самаго построенія какъ прямаго такъ и наклоннаго цилиндровъ слѣдуетъ, что всякое сѣченіе GKH (черт. 246 и 247) сдѣланное параллельно основанію есть кругъ равный основанію. Въ самомъ дѣлѣ GI=CB, KI=LB, IH=BF, какъ параллельныя прямыя, лежащія между параллельными прямыми; но CB=LB=BF какъ радіусы одного и того же круга, слѣд. GI=KI=IH, и посему точки G. K, H находятся въ равномъ разстояніи отъ точки I. И такъ въ сѣченіи KGH мы находимъ отличительное свойство круга, и посему сѣченіе GKH должно быть кругомъ.

505. Если въ конусѣ и цилиндрѣ будутъ сдѣланы сѣченія плоскостями, непараллельными основанію, то образуются кривыя линіи, имѣющія особенныя свойства. Разсматриваніе этихъ кривыхъ составляетъ предметъ высшихъ частей Математики.

506. Третье тѣло вращенія происходитъ отъ обращенія полукруга около своего діаметра (черт. 248). Представимъ себѣ, что полукругъ AFDB обращается около діаметра AB, пока не придетъ въ первоначальное свое положеніе. Очевидно, что полуокружность AFDB опишетъ сомкнутую кривую поверхность, имѣющую то свойство, что всѣ ея точки равно отстоятъ отъ точки C, потому что всѣ точки полуокружности, при всякомъ ея положеніи, находятся въ равномъ разстояніи отъ точки C. Тѣло, ограниченное таковою поверхностью, называется *шаромъ*, поверхность его *шаровою поверхностію* (сферическою), а точка *центромъ*.

Такъ какъ всѣ точки поверхности шара равно отстоятъ отъ центра, то

посему и всѣ прямыя, соединяющія центръ шара съ точками, произвольно взятыми на поверхности шара, равны. Эти прямыя называются *радіусами* или *полупоперечниками* шара. Очевидно, что всѣ прямыя проходящія отъ одной точки поверхности чрезъ центръ къ другой, противоположной точкѣ, равняются двойному радіусу, и посему также равны. Таковыя прямыя называются *діаметрами* или *поперечниками*.

507. *Въ шарѣ* (черт. 249) *всякое сѣченіе плоскостію есть кругъ.*

Для доказательства проведемъ изъ центра C перпендикуляръ CO на площадь сѣченія DFEG; пусть будетъ O точкою пересѣченія. Соединивъ центръ C съ точками, D, F, E, G произвольно взятыми на линіи сѣченія плоскости съ поверхностію шара, получимъ равныя прямыя DC, FC, EC, GC, потому что (§ 506) всѣ точки поверхности шара равно отстоятъ отъ его центра. Если же наклонныя DC, FC, EC, GC къ плоскости DFEG равны, то ихъ конечныя точки, D, F, E, G равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра O, то есть, DO=EO=FO=GO. Если же эти прямыя равны, то сѣченіе DFEG, должно быть кругомъ, коего радіусы суть OD, OF, OE....

508. Изъ прямоуг. треугольника явствуетъ, что OD менѣе DC, то есть радіусъ сѣченія менѣе радіуса шара. И такъ окружность сѣченія, не проходящаго чрезъ центръ, менѣе окружности сѣченія проходящаго чрезъ центръ шара, потому что радіусъ послѣдней равняется радіусу шара. Посему сѣченія, проходящія чрезъ центръ, называются *большими кругами*, а прочія *малыми*.

Часть поверхности шара, заключающаяся между двумя встрѣчающимися большими полукругами, называется *сферическимъ треугольникомъ*.

509. Часть шара (черт. 248) FAGK, содержащаяся между поверхностью его шара и плоскостью разсѣкающею, называется *сферическимъ сегментомъ*. Онъ происходитъ отъ обращенія круговаго полусегмента AFK около его высоты AK.

Часть шара AFCG (черт. 248), происходящая отъ обращенія круговаго сектора AFC около радіуса AC, состоящая изъ сферическаго сегмента AEKG и конуса CFGK, называется сферическимъ секторомъ; а часть шара заключающаяся между двумя большими полукругами, взаимно непересѣкающимися— *шаровымъ вырѣзкомъ*.

II. Объ измѣреніи поверхностей тѣлъ вращенія.

510. Разсмотрѣвъ какимъ образомъ происходятъ тѣла вращенія, и нѣкоторыя изъ ихъ свойствъ, изслѣдуемъ теперь способъ находить мѣру для ихъ поверхностей. Сравнивая ихъ для этой цѣли съ многогранниками, находимъ, что прямой конусъ, по своему виду, имѣетъ сходство съ правильною пирамидою, а прямой цилиндръ съ прямою призмою. коей

основанія суть правильныя фигуры, имѣющія безчисленное множество сторонъ, и мы скоро убѣдимся, что выраженія для мѣры ихъ поверхностей также сходны. Но прежде нежели можно изслѣдовать этотъ предметъ, должно доказать нѣкоторыя леммы, относящіяся къ кривымъ поверхностямъ.

511. *Всякая площадь* OABCD (черт. 250) *менѣе кривой поверхности ограничиваемой тѣмъ же обводомъ* PABCD.

Это предложеніе столь очевидно, что могло бы быть допущено безъ дальнѣйшаго доказательства, потому что плоскость можетъ быть принимаема точно въ такомъ же отношеніи къ кривой поверхности, въ какомъ прямая линія находится къ кривой. Впрочемъ, оно объясняется слѣдующимъ образомъ:

Поверхность есть протяженіе въ длину и ширину, и посему нельзя представить себѣ поверхности, которая была бы болѣе другой, безъ того, чтобы измѣренія первой не были бы болѣе соотвѣтственныхъ измѣреній второй, по крайней мѣрѣ въ нѣкоторыхъ направленіяхъ; если же измѣренія одной поверхности во всѣхъ направленіяхъ, болѣе измѣреній другой, то не подлежитъ сомнѣнію, что первая должна быть болѣе второй. Но въ разсматриваемомъ случаѣ, въ какомъ бы направленіи ни была проведена плоскость BPD, она разсѣкаетъ данную площадь въ прямой BD, а кривую поверхность въ кривой BPD; и всегда первая линія сѣченія менѣе второй, потому что изъ всѣхъ линій между двумя точками проведенныхъ, прямая есть самая кратчайшая. А изъ сего слѣдуетъ, что плоскость OABCD менѣе объемлющей кривой поверхности PABCD.

512. Поверхность, которая можетъ быть пересѣчена прямою только въ двухъ точкахъ,будемъ называть *выпуклою*. При этомъ должно замѣтить, что хотя прямая можетъ пересѣкать выпуклую поверхность только въ двухъ точкахъ; однакожъ она можетъ совпадать, какъ наприм. съ поверхностью цилиндра и конуса. Выраженіе выпуклой поверхности примѣняется не только къ кривымъ поверхностямъ, но и къ тѣмъ, которыя составлены изъ плоскостей и кривыхъ поверхностей.

513. *Всякая выпуклая поверхность* OABCD (черт. 251) *менѣе объемлющей поверхности наприм.* PABCD, *ограничиваемой тѣмъ же обводомъ* ABCD.

Въ какомъ бы направленіи ни были пересѣкаемы обѣ выпуклыя поверхности плоскостію, наприм. плоскостью PBOD, отъ пересѣченія объемлющей поверхности происходила бы выпуклая линія DPB, которая также была бы объемлющею, въ отношеніи линіи сѣченія DOB, объемлемой поверхности съ плоскостію. А какъ выпуклая объемлющая линія болѣе объемлемой (§ 243), то изъ того можно заключить, какъ въ § 511, что и объемлющая выпуклая поверхность болѣе объемлемой.

Слѣдствіе 1. Если выпуклая поверхность ограничена съ двухъ сторонъ плоскостями, какъ напримѣръ въ цилиндрѣ, и объемлется другою выпуклою поверхностью, ограниченною тѣми же плоскостями, то первая поверхность менѣе второй.

Слѣдствіе 2. Объемлющая выпуклая поверхность всегда болѣе объемлемой, имѣютъ ли онѣ общія точки, линіи и части поверхности, или вовсе ничего общаго не имѣютъ.

514. Изъ предъидущаго (§ 513) слѣдуетъ, что если на основаніи прямаго цилиндра будетъ внутри его построена призма, то ея боковая поверхность менѣе кривой поверхности цилиндра.

Докажемъ теперь, что *если въ данномъ прямомъ цилиндрѣ впишемъ въ основаніи его и опишемъ около него правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ, и если изъ вершинъ ихъ угловъ проведемъ прямыя параллельныя къ оси* OO′ (черт. 252) *до плоскости верхняго основанія, и соединимъ ихъ верхнія конечныя точки прямыми; то* I. *построимъ двѣ прямыя призмы, одну вписанную въ цилиндрѣ, а другую описанную;* II. *всегда можно построить такія призмы, что разность между ихъ поверхностями можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины.*

I. Что многогранники, построенные вышепоказаннымъ образомъ, заключаются между двумя равными и параллельными многоугольниками, и что ихъ грани суть параллелограммы, то есть, что многогранники суть призмы, такъ очевидно, что въ этомъ весьма легко увѣриться. Объяснимъ только, что одна изъ этихъ призмъ будетъ вписанная, а другая описанная. Прямыя $aa'bb'$ и проч. проведенныя параллельно оси OO′, также перпендикулярны къ плоскости $abcdef$, и посему находятся на поверхности цилиндра, такъ какъ прямоугольники $aOO'a'$, $bOO'd$ и проч. равны производящему прямоугольнику. Слѣдовательно прямая призма $a'b'd'f'$ $abdf$, имѣя свои ребра на поверхности цилиндра, будетъ *вписанною*.

Чтобы избѣжать неясности въ фигурѣ, представлена въ черт. 252 только одна грань ABB′A′ описанной призмы. Легко убѣдиться, что если въ этой грани чрезъ точку касанія G проведемъ прямую GG′ параллельную оси OO′, то GG′ будетъ находиться на поверхности цилиндра, потому что прямоугольникъ GOO′G′ равенъ производящему прямоугольнику. И такъ грань ABB′A′ будетъ касаться поверхности цилиндра. Такимъ же образомъ доказывается, что прочія грани касаются поверхности цилиндра.

II. Означивъ поверхность описанной призмы безъ основаній буквою S′, периметръ основанія чрезъ P′, поверхность вписанной призмы безъ основаній чрезъ S, периметръ ея основанія чрезъ P, а общую ихъ высоту чрезъ H, получимъ:

$$S' = P' \times H \ (\S\ 454)$$
$$S = P \times H \ (\S\ 454)$$
$$S' - S = (P' - P) \times H.$$

Но какъ P′—P, то есть разность между периметрами описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ, можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины; то изъ того и слѣдуетъ, что разность между поверхностями описанной и вписанной призмъ можетъ также быть сдѣлана менѣе всякой данной величины,—и посему, тѣмъ болѣе разность между поверхностью цилиндра и поверхностью каждой призмы можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины.

515. Изъ послѣдняго заключенія можно-бъ было вывести, что и для мѣры поверхности прямаго цилиндра можно также принять произведеніе изъ окружности его основанія на высоту, не опасаясь сдѣлать погрѣшности. Но чтобы совершенно въ томъ увѣриться, можно употребить доказательство, подобное тому, какое было показано въ § 277, при отъискиваніи мѣры для площади круга.

Представимъ себѣ, что около даннаго прямаго цилиндра PQRS (черт. 253) описана прямая призма ABCDEFGHIKLM. Означимъ чрезъ c окружность основанія даннаго цилиндра, а чрезъ H его высоту, и пусть периметръ основанія призмы$=p$. Сверхъ сего положимъ, что разность между поверхностью призмы и поверхностью цилиндра=D, а разность между периметромъ основанія призмы и окружностью основанія цилиндра $= d$. поверхность описанной призмы=P, поверхность цилиндра=C. И такъ

$$P = C + D,$$
а $$p = c + d;$$
но (§ 454) $$P = p \times H.$$

Слѣд., вставивъ равныя величины вмѣсто равныхъ, получимъ:

$$C + D = (c + d)\ H$$
или
$$C + D = c \times H + d \times H,$$

гдѣ C и $c \times H$ постоянныя величины, а D и $d \times H$ перемѣнныя; слѣд. (§ 247) C и $c \times H$ должны быть равны, т. е. *кривая поверхность прямаго цилиндра равняется окружности основанія, умноженной на высоту.*

Такимъ же способомъ можно доказать тоже самое предложеніе, вписавъ въ данномъ прямомъ цилиндрѣ прямую призму (черт. 254).

516. Подобнымъ же образомъ какъ сравнивали боковыя поверхности прямаго цилиндра и прямой призмы, можно сравнивать боковую поверхность прямаго конуса съ боковою поверхностью правильной пирамиды, и изъ сего сравненія вывесть способъ опредѣлять кривую поверхность прямаго конуса. Докажемъ сперва (черт. 225), что *если въ основаніи конуса Sace будетъ вписанъ правильный многоугольникъ, и около него описанъ подобный многоугольникъ, и чрезъ прямыя, соединяющія вершины ихъ угловъ съ вершиною конуса будутъ проведены плоскости, то:* I. *будутъ построены, одна вписанная, а другая описанная правильныя пирамиды;* II. *можно вписать и описать таковыя правильныя пирамиды, что разность между ихъ поверхностями будетъ менѣе всякой данной величины.*

I. Такъ какъ основаніе пирамиды S*abcdef* есть правильный многоугольникъ, и прямая SO, высота прямаго конуса есть вмѣстѣ и высота пирамиды, и проходитъ чрезъ центръ основанія O, посему (§ 431) пир. S*abcdef* должна быть правильная. При томъ, какъ ея ребра суть гипотенузы производящаго треугольника S*a*O, то посему они будутъ находиться на поверхности конуса; слѣд. пирамида S*abcdef* вписана въ конусѣ.

Пирамида SABC будетъ также правильная, потому что ея основаніе есть правильный многоугольникъ, и высота проходитъ чрезъ центръ основанія. Она будетъ описанною, потому что апоѳемы ея, или высоты ея треугольныхъ граней, равняются гипотенузѣ производящаго треугольника, и слѣд. находятся на поверхности конуса.

II. Означивъ чрезъ P и P′ боковыя поверхности описанной и вписанной пирамидъ, а чрезъ p и p' соотвѣтствующіе периметры основаній, получимъ

$$P = \frac{1}{2}\, p \times SG, \text{ а } P' = \frac{1}{2}\, p' \times Sg$$

слѣд. $$P - P' = \frac{1}{2}\, p \times SG - \frac{1}{2}\, p' \times Sg$$

Но изъ предъидущаго намъ извѣстно (§ 242), что съ увеличиваніемъ числа сторонъ правильныхъ многоугольниковъ описанныхъ и вписанныхъ, разность между ихъ периметрами безпрерывно уменьшается, и въ то же самое время и разность между апоѳемами SS и Sg также уменьшается; а изъ сего можно заключить, что и разность между боковыми поверхностями обѣихъ пирамидъ, (P — P′), можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины.

517. Очевидно, что съ увеличиваніемъ сторонъ вписаннаго и описаннаго правильнаго многоугольниковъ, боковая поверхность описанной пирамиды уменьшается, а поверхность вписанной увеличивается, и въ то же самое время, та и другая приближается къ кривой поверхности конуса. Въ самомъ дѣлѣ, периметръ вписаннаго многоугольника увеличивается безпрерывно, и апоѳема Sg, удаляясь отъ перпендикуляра SO, и приближаясь къ поверхности конуса, также увеличивается, а посему и мѣра боковой поверхности вписанной пирамиды, равняющаяся $\frac{1}{2}\, p' \times Sg$, также увеличивается. Между тѣмъ периметръ описаннаго многоугольника (§ 242) безпрерывно уменьшается, а апоѳема SG сохраняетъ одну и ту же величину; посему поверхность описанной пирамиды, равная $\frac{1}{2}\, p \times SG$,

безпрерывно уменьшается. Изъ этого ясно слѣдуетъ, что во первыхъ кривая поверхность конуса заключается между боковыми поверхностями обѣихъ пирамидъ, и во вторыхъ, такъ какъ разность между поверхностями обѣихъ пирамидъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, то разность между боковою поверхностью каждой пирамиды и кривою поверхностью конуса можетъ тѣмъ болѣе быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, какъ бы мала она ни была.

518. Основываясь на предъидущемъ предложеніи, не трудно доказать, что *кривая поверхность прямаго конуса* SAO (черт, 255) *равняется окружности его основанія, умноженной на половину стороны* SA. Означимъ поверхность прямаго конуса (черт. 255) чрезъ K, окружность его основанія чрезъ c, а бокъ конуса чрезъ l, поверхность описанной правильной пирамиды чрезъ P, а периметръ ея основанія чрезъ p. Сверхъ сего положимъ, что разность между поверхностью описанной пирамиды и поверхностью даннаго конуса $=$ D; а разность между периметромъ основанія пирамиды и окружностью основанія конуса$=d$, то

$$P=K+D$$

и $\quad p=c+d.$

Изъ § 452 слѣдуетъ, что $\quad P=p\times{}^1/_2 l;$

вставивъ вмѣсто равныхъ величинъ равныя, получимъ:

$$K+D=(c+d)+{}^1/_2 l$$

или $\quad K+D=c\times{}^1/_2 l+d\times{}^1/_2 l$

гдѣ K и $c\times{}^1/_2 l$ постоянныя величины, а D и $d\times{}^1/_2 l$ перемѣнныя: слѣд. по § 247 $\quad K=c\times{}^1/_2 l$

что и доказать надлежало.

519. Зная способъ опредѣлять кривую поверхность прямаго конуса не трудно вычесть, чему равняется поверхность усѣченнаго параллельно основанію прямаго конуса CDAB (черт. 257). Для сего проведемъ въ плоскости SAB, проходящей чрезъ ось SO перпендикулярно къ боку конуса SB прямую BH, равную окружности OB, и соединивъ точку H съ S прямою HS, проведемъ DF параллельно BH. По причинѣ параллельности прямыхъ DF и BH, имѣемъ

$$BH : DF=BS : DS \quad (1):$$

но изъ подобія треугольниковъ SCD. SAB слѣдуетъ:

$$AB : CD=BS : DS,$$

или умноживъ члены перваго отношенія на знаменателя отношенія между окружностью и діаметромъ π, получимъ:

$$\pi AB : \pi CD=BS : DS \quad (2)$$

Сравнивъ пропорціи (1) и (2), находимъ, что

$$HB : DF=\pi AB : \pi CD;$$

но по условію, $\quad BH=\pi AB$: слѣд. и $DF=\pi CD$. то есть DF

равна окружности CND.

Поверхность конуса SAB$=$окр. AB$\times\frac{SB}{2}$ (§ 518)

и $\quad$ площ. треуг. SBH$=BH\times\frac{SB}{2}$

слѣд. $\quad$ пов. кон. SAB$=$треуг. SBH. (3)

По § 518 $\quad$ пов. кон. SCD$=$окр. CD$\times\frac{SD}{2}$

и $\quad$ площ. треуг. SBE$=DF\times\frac{SD}{2}$;

но окружн. CD, какъ мы видѣли, равна DF;

слѣд. $\quad$ пов. конуса SCD$=$треуг. SDF (4);

Вычтя уравн. (4) изъ уравн. (3), получимъ:

пов. кон. SAB—пов. кон. SCD$=$тр. SBH—тр. SDF

или пов. усѣчен. кон. CDAB$=$трап. DFHB;

но $\quad$ трапец. DFHB$=(BH+DF)\times{}^1/_2 BD$,

слѣд. и пов. усѣч. кон. CDAB$=(BH+DF)\times{}^1/_2 DB$,

или, поставивъ вмѣсто BH и DF равныя величины. получимъ:

пов. усѣчен. конуса CDBA$=$(окр. AB$+$окр. CD)$\times{}^1/_2$BD

$={}^1/_2$ (окр.$=$AB$+$окр. CD)$\times$BD,

то есть, *кривая поверхность усѣченнаго прямаго конуса равна полусуммѣ окружностей обѣихъ основаній, умноженной на его бокъ.*

520. Это выраженіе можетъ быть упрощено, если вмѣсто полусуммы окружностей обоихъ основаній вставимъ равную ей величину. Для сего изъ средины бока усѣченнаго конуса I проведемъ плоскость MLI параллельно основанію, и прямую IK параллельно BH. Точно такимъ же образомъ, какъ выше было доказано, что DF$=$окружн. CD выведемъ, что IK$=$окр. MI; но IK$=$

$=\frac{BD+DF}{2}$(§ 269); слѣд. и окружн. MI$={}^1/_2$ (окр. AB$+$окр. CD). А изъ сего слѣдуетъ, что

пов. усѣч- кон. CDAB$={}^1/_2$ (окр. AB$+$окр. CD)$\times$BD$=$окр. MI$\times$BD, то есть, *боковая поверхность прямаго конуса, усѣченнаго параллельно основанію, равна окружности параллельнаго сѣченія сдѣланнаго въ равномъ разстояніи отъ обоихъ основаній, умноженнаго на его бокъ.*

521. Зная способъ опредѣлять боковыя поверхности прямаго цилиндра и конуса, цѣлаго и усѣченнаго, можно опредѣлять поверхность шара. Но и эта поверхность тѣла, вписаннаго и описаннаго около шара, такъ какъ для опредѣленія боковой поверхности цилиндра и конуса требовалось знать боковую поверхность вписанныхъ и описанныхъ призмъ и пирамидъ. И такъ, сперва докажемъ слѣдующее предложеніе:

522. *Если* (черт. 258) *около полукруга aMb будетъ описанъ правильный многоугольникъ* CEFGHID *четнаго числа сторонъ, и если предположимъ, что этотъ полумногоугольникъ будетъ вмѣстѣ съ полукругомъ обращаться около* CD, *то периметръ полумногоугольника опишетъ поверхность тѣла вращенія, равняющуюся окружности большаго круга, умноженной на прямую* CD.

Поверхность тѣла вращенія, происходящаго отъ обращенія полумногоугольника, около прямой CD, состоитъ изъ разныхъ частей, описанныхъ его сторонами. Сторона CE опишетъ кривую поверхность прямаго конуса, стороны EF, FG, GH.... поверхности усѣченныхъ конусовъ, и наконецъ послѣдняя сторона ID поверхность цѣлаго конуса. Сумма всѣхъ этихъ частныхъ поверхностей составляетъ поверхность всего тѣла вращенія.

Поверхность усѣченнаго конуса, происходящаго отъ обращенія стороны EF, (которую будемъ означать: пов. усѣч. кон. ED), равняется 2π MN$\times$EF (§ 520), такъ какъ EF касается окружности точкою M, находящеюся на ея срединѣ. Но выраженіе: 2π MN$\times$EF можетъ быть превращено въ другое, въ которомъ не содержится сомножителя (окр. MN), измѣняющагося для каждаго конуса. Для сего опустимъ перпендикуляръ EP на FL и проведемъ радіусъ MO. Изъ подобныхъ треуг. EFP и MNO (§ 204) выводится, что

$$\text{MN} : \text{EP} = \text{MO} : \text{EF};$$

откуда

$$\text{MN}\times\text{EF} = \text{MO}\times\text{EP};$$

слѣд. (A) пов. усѣч. кон. EF$=2\pi$MO$\times$EP,

или, вставивъ вмѣсто EP равную ей KL (§ 100),

пов. усѣч. кон. EF$=2\pi$MO$\times$KL,

то есть, кривая поверхность усѣченнаго конуса EF равняется окружности большаго круга, умноженной на высоту KL.

Подобное же выраженіе выводится и для поверхности прочихъ усѣченныхъ конусовъ. Остается еще только разсмотрѣть, будетъ ли оно общимъ и для поверхностей конусовъ, происходящихъ отъ обращенія крайнихъ сторонъ EC и ID даннаго правильнаго полумногоугольника.

Поверхность конуса EC равняется $2\pi\text{EK}\times\frac{\text{EC}}{2}$(§ 519)$=2\pi\frac{\text{EK}}{2}\times\text{EC}=2\pi\text{RS}\times\text{EC}$ (потому что $\frac{\text{EK}}{2}=\text{RS}$).

Изъ подобія же треугольниковъ ECK и RSO (§ 240), слѣдуетъ, что EC : RO$=$CK : RS.

Откуда EC$\times$RS$=$RO$\times$CK;

слѣд. пов. кон. EC$=2\pi$RO$\times$CK,

то есть, кривая поверхность конуса EC также равняется окружности большаго круга, умноженной на высоту.

И такъ, мы вывели (полагая радіусъ даннаго полукруга$=r$)

пов. кон. EC$=2\pi r\times$CK

пов. усѣч. кон. EF$=2\pi r\times$KL

пов. усѣч. кон. FG$=2\pi r\times$LO

. . . .

слѣд. пов. всего тѣла вращенія$=2\pi r$ (CK$\times$KL$+$LO....)

$=2\pi r$. CD

то есть, *поверхность всего тѣла вращенія, происходящаго отъ обращенія полумногоугольника около прямой* CD, *называемой его осью, равна окружности большаго круга шара, описываемаго полукругомъ, умноженной на ось* DC.

523. Представимъ себѣ, что въ томъ же полукругѣ вписанъ правильный того же числа сторонъ полумногоугольникъ, который пусть также обращается вмѣстѣ съ полукругомъ около діаметра, то его полупериметръ также опишетъ поверхность тѣла вращенія, состоящаго изъ конусовъ и усѣченныхъ конусовъ. По сему, по предъидущему параграфу, поверхность его равняется окружности круга, коего радіусъ равенъ апоѳемѣ многоугольника, умноженной на ось его, равняющуюся діаметру даннаго полукруга. Сравнимъ теперь поверхности описаннаго и вписаннаго въ шарѣ тѣлъ вращенія, и для краткости означимъ поверхность описаннаго буквою S′, вписаннаго буквою s, а апоѳему чрезъ a.

По § 522 $\quad S'=2\pi r\times\text{DC}=2\pi r\times2\text{OC}=4\pi r\times\text{OC}$

$s=2\pi a\times2r \quad =4\pi r\times a$.

слѣд. $\quad S'-s=4\pi r\,(\text{OC}-a)$

Но изъ § 174 извѣстно, что съ увеличиваніемъ числа сторонъ вписаннаго правильнаго многоугольника, разность между радіусомъ и апоѳемою уменьшается, такъ что $(r-a)$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. Но и разность между OC и r можетъ быть уменьшаема до безконечности; а изъ сего слѣдуетъ, что и между OC и a разность можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, а посему и $S'-s$ можетъ быть менѣе всякой данной величины. А какъ поверхность шара заключается между $S'-s$, то тѣмъ болѣе разность между нею и каждою изъ поверхностей тѣлъ вращенія можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, какъ бы мала она ни была.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что поверхность шара есть предѣлъ поверхности тѣла вращенія, какъ описаннаго около, такъ и вписаннаго.

524. Изъ предъидущаго очевидно, что когда разность между поверхностью описаннаго тѣла вращенія и поверхностью шара менѣе всякой данной величины, то вмѣстѣ съ тѣмъ разность и между осью CD и діаметромъ ab также менѣе всякой данной величины. Изъ сего же слѣдуетъ, что для опредѣленія поверхности шара стоитъ только окружность

большаго круга умножить на діаметръ, такъ какъ окружность большаго круга есть общій факторъ для поверхностей всѣхъ описанныхъ тѣлъ вращенія; другой же факторъ, ось CD, также безпрерывно приближается къ діаметру ab, по мѣрѣ того, какъ разность между поверхностями уменьшается.

Выведемъ, основываясь на способѣ предѣловъ, выраженіе для поверхности шара. Означимъ поверхность тѣла вращенія, описаннаго около шара чресъ S, поверхность шара чрезъ s, діаметръ шара чрезъ d, а ось тѣла вращенія чрезъ x. Изъ § 522 слѣдуетъ, что

$$S=2\pi r.x \quad (N)$$

Положимъ, что разность между поверхностью описаннаго тѣла вращенія и поверхностью шара$=Y$, а разность между осью тѣла вращенія и діаметромъ$=y$, то

$$S-s=Y, \text{ и } x-d=y$$

откуда $S=s+Y$, а $x=d+y$.

Поставивъ въ уравн. (N) равныя величины вмѣсто равныхъ, получимъ:

$$s+Y=2\pi r\ (d+y)$$

или $s+Y=2\pi r.d+2\pi ry$

гдѣ s и $2\pi r.\ d$ величины постоянныя, а Y и $2\pi ry$ величины перемѣнныя; слѣд. (247) $s=2\pi r.d$,

т. е., *поверхность шара равняется площади большаго его круга, умноженной на діаметръ.*

525. *Слѣдствіе.* Означивъ радіусъ шара буквою r, то діаметръ его$=2r$, а окружность большаго круга$=2\pi r$, слѣд. поверхность шара будетъ$=2\pi r\times2r=4\pi r^2$. Но какъ πr^2 означаетъ площадь такого круга, коего радіусъ$=r$, или въ этомъ случаѣ, площадь большаго круга шара, то изъ того іслѣдуетъ, что *поверхность шара равна четыремъ площадямъ большагокруга.*

526. *Поверхность сферическаго сегмента равняется также окружности большаго круга, умноженной на высоту сегмента.*

Это предложеніе доказывается совершенно такимъ же образомъ какъ и выраженіе, выведенное для опредѣленія поверхности шара. Пусть s означаетъ поверхность сферическаго сегмента, а S поверхность соотвѣтствующей части тѣла вращенія, около шара описаннаго; пусть высота сегмента$=h$, а соотвѣтствующая часть оси тѣла вращенія$=x$; сверхъ сего пусть $S-s=Y$, и $x-h=y$.

Изъ § 522 слѣдуетъ, что

$$S=2\pi r.x$$

но $S=s+Y$, а $x=h+y$

слѣд. $s+Y=2h\pi r.\ (h+y)$

или $s+Y=2\pi r+2\pi r.y$

откуда, по § 247, $s=2\pi r.h$

что и доказать слѣдовало.

527. Чтобы опредѣлить (черт. 261) часть поверхности шара GMFE, содержащуюся между двумя параллельными кругами GMN и ENF, и называемую *шаровымъ поясомъ*, слѣдуетъ изъ поверхности большаго сферическаго сегмента EGHF вычесть поверхность меньшаго сферическаго сегмента GAH.

пов. сфер. сегм. EGAHF$=$окр. $AC\times AL$ (§ 526)

пов. сфер. сегм. GAH$=$окр. $AC\times AK$.

И такъ пов. шаров. пояса$=$окр. $AC\times(AL-AK)$

$=$окр. $AC\times KL$

есть, *поверхность шароваго пояса равна окружности большаго круга, умноженной на его высоту.*

III. Объ измѣреніи объемовъ тѣлъ вращенія.

528. Чтобъ определить объемъ цилиндра, докажемъ сперва, что *разность между объемами вписанной въ цилиндръ призмы и описанной можно сдѣлать менѣе всякой данной величины.*

Представимъ себѣ въ основаніи цилиндра вписанный правильный многоугольникъ и описанный около него, и построимъ призмы, которыя имѣли бы эти многоугольники своими основаніями, а высотою высоту цилиндра. Тогда будемъ имѣть (какъ мы видѣли въ § 514) одну вписанную, а другую описанную призму. Означимъ объемъ первой чрезъ V, а второй чрезъ V'; площадь основанія первой чрезъ A, а второй чрезъ A', а общую ихъ высоту чрезъ H. Въ такомъ случаѣ получимъ:

$$V'=A'\times H \text{ (§ 469)}$$

$$V=A'\times H$$

слѣд. $V'=V=(A'-A)H.$

Но разность между A' и A можно сдѣлать менѣе всякой данной величины, посему и $V'-V$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины. А какъ объемъ цилиндра заключается между объемами обѣихъ призмъ, то тѣмъ болѣе разность между объемомъ цилиндра и объемомъ каждой призмы будетъ менѣе всякой данной величины.

529. Изъ послѣдняго заключенія можно вывести, что цилиндръ можно принять за призму, въ которой основаніе есть правильный многоугольникъ о безчисленномъ множествѣ сторонъ, и который въ то самое время, когда призма превратилась бы въ цилиндръ, сдѣлался бы кругомъ. Изъ этого же можно заключить, что также и *объемъ цилиндра равняется основанію, умноженному на высоту.*

Чтобъ въ этомъ совершенно убѣдиться, можно доказать, какъ показано въ § 515 для поверхности цилиндра, что площадь основанія, умноженная на высоту, должна быть мѣрою объема цилиндра.

530. Подобнымъ образомъ выводится, что *объемъ конуса равняется его основанію, умноженному на треть высоты.*

Для сего сперва доказываютъ, что разность между объемомъ конуса и объемомъ вписанной или описанной пирамиды можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, совершенно такимъ же способомъ, какъ это было въ § 528 доказано для цилиндра. Стоитъ только принять, что въ выведенныхъ уравненіяхъ H означаетъ не цѣлую высоту, а треть. Увѣрившись, что разность между объемомъ конуса и объемомъ описанной и вписанной пирамиды можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, доказываютъ какъ во многихъ предшествовавшихъ подобныхъ предложеніяхъ, что основаніе конуса, умноженное на треть высоты, должно быть мѣрою его объема.

531. Чтобы опредѣлить объемъ конуса, усѣченнаго параллельно основанію, должно, поступая по аналогіи, сравнять его съ объемомъ пирамиды, усѣченной также параллельно основанію.

Пусть (черт. 262) пирамида TFOH имѣетъ съ даннымъ конусомъ SAB одну высоту и равномѣрное основаніе. Представимъ себѣ, что основанія обѣихъ тѣлъ находятся на одной плоскости, тогда вершины ихъ S и T будутъ въ равномъ разстояніи отъ плоскости ихъ основаній, и плоскость верхняго основанія усѣченнаго конуса, будучи продолжена, пересѣчетъ пирамиду; пусть IKL будетъ это сѣченіе. Докажемъ теперь, что это сѣченіе IKL будетъ равномѣрно кругу EPD, если, какъ мы положили, основанія FOH и кругъ BA равномѣрны.

Круг. AB : кр. ED $=\overline{OA}^2 : \overline{GD}^2 = \overline{AS}^2 : \overline{DS}^2$

тр. FOH : тр. IKL $=\overline{OF}^2 : \overline{IK}^2 = \overline{FT}^2 : \overline{IT}^2$

$\overline{AS}^2 : \overline{DS}^2 = \overline{FT}^2 : \overline{IT}^2$

слѣд. круг. AB : кр. ED = тр. FOH, тр. IKL,

но, по условію, кр. AB = тр. FOH,

слѣд. и кр. ED = тр. IKL.

Объемомъ прям. конуса SBA = кр. AB $\times \frac{SO}{3}$ (§ 530)

а объемомъ пирам. TFOH = тр. FOH $\times \frac{SO}{3}$

Изъ двухъ этихъ уравненій слѣдуетъ что конусъ SBA равномѣренъ съ пирамидою TFOH. Такимъ же образомъ можно убѣдиться, что и конусъ SED равномѣренъ съ пирамидою TIKL, потому что имѣютъ одну высоту и равномѣрныя основанія, кругъ ED и треуг. IKL. И такъ отнявъ отъ равныхъ величинъ равныя получимъ:

кон. SAB — кон. SED = пир. TFOH — пир. TIKL

или усѣч. кон. EDAB = усѣч. пир. IKLFOH.

Но усѣченная пирамида IKLFOH (§ 476) равна тремъ пирамидамъ, имѣющимъ высотою своею высоту усѣченной пирамиды, и основаніями: первая — нижнее основаніе усѣченной пирамиды, вторая — верхнее, а третья — среднее пропорціальное между верхнимъ и нижнимъ; и какъ конусы равномѣрны съ пирамидами, имѣющими ту же высоту и равномѣрныя основанія, то и *объемъ усѣченнаго конуса равняется тремъ конусамъ, имѣющимъ одну высоту съ усѣченнымъ конусомъ, основаніе же перваго равняется нижнему основанію усѣченнаго конуса, основаніе втораго — верхнему, а третьяго есть средняя пропорціональная величина между нижнимъ и верхнимъ основаніями.*

Означимъ радіусъ нижняго основанія чрезъ R, а верхняго чрезъ r; площадь нижняго основанія будетъ πR^2 (§ 278), а верхняго $=\pi r^2$: слѣд., если высоту усѣченнаго конуса означимъ чрезъ h, то объемъ перваго конуса выразится чрезъ $\pi R^2 . \frac{h}{3}$. а втораго чрезъ $\pi r^2 . \frac{h}{3}$. Чтобы вывести выраженіе для третьяго конуса, слѣдуетъ сперва вывести выраженіе для его основанія. Означимъ его чрезъ x. Такъ какъ оно должно быть среднею пропорціональною величиною между площадями нижняго и верхняго основаній, то есть между πR^2 и πr^2, то изъ того слѣдуетъ пропорція:

$$R\pi^2 : x = x : \pi r^2$$

откуда $x^2 = \pi^2 R^2 r^2$

слѣд. $x = \pi R r$

и посему объемъ третьяго конуса выразится чрезъ $\pi R r \frac{h}{3}$. А изъ сего слѣдуетъ, что

об. усѣч. кон. EDAB $= \pi R^2 \frac{h}{3} + \pi r^2 \frac{h}{3} + \pi R r^2 \frac{h}{3}$

$$= \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi R r + \pi r^2).$$

532. Чтобы вывести выраженіе для объема шара должно поступить такъ, какъ было показано для поверхности шара, то есть, должно найти, чему равняется объемъ тѣла вращенія, описаннаго около шара, или вписаннаго въ немъ, которое имѣло бы еще то свойство, чтобы разность между его объемомъ и объемомъ шара можно было сдѣлать менѣе всякой данной величины. И такъ должно сперва доказать слѣдующее предложеніе:

533. *Если* (черт. 263) *около полукруга aMPb будетъ описанъ правильный полумногоугольникъ* ABDEF...., *и этотъ полумногоугольникъ будетъ обращаться около* AH, *то* I. *произойдетъ тѣло вращенія, коего объемъ равняется его поверхности, умноженной на $\frac{1}{3}$ радіуса, и* II. *если число сторонъ полумногоугольника будетъ увеличиваться, то разность между объемами тѣла вращенія и шара будетъ уменьшаться, и можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины.*

1. Соединивъ центръ C съ вершинами производящаго полумногоугольника, разсмотримъ сперва, чему равняется объемъ тѣла вращенія, происходящаго отъ обращенія треуг. ABC. Проведя BI перпендикулярно къ

AC, раздѣлимъ производящій треуг. ABC на два прямоуг. треугольника ABI и CBI; оба опишутъ прямые конусы ABI и CBI, имѣющіе общимъ основаніемъ кругъ BI; слѣд. отъ обращенія треуг. ABC произойдетъ двойной конусъ, коего объемъ равняется суммѣ объемовъ ABI и CBI. Но

об. кон. ABI=круг. $BI \times \frac{1}{3} AI$ (§ 530)

а об. кон. CBI=круг. $BI \times \frac{1}{3} CI$,

слѣд. об. дв. кон. ABC=круг. $BI \times \frac{1}{3}(AI+CI)$

или об. дв. кон. ABC=круг. $BI \times \frac{1}{3}$ AC. (1)

Чтобъ вмѣсто круга BI получить другой факторъ, который имѣлъ бы нѣчто общее для всѣхъ частныхъ тѣлъ вращенія, сравнимъ площадь круга BI съ поверхностью, которая образуется производящей линіею AB, то есть съ поверхностью конуса AB.

Площ. круг. BI=окр. $BI \times \frac{1}{2}$ BI

а пов. кон. AB=окр. $BI \times \frac{1}{2}$ AB;

слѣд. пл. кр. BI : пов. кон. AB=окр. $BI \times \frac{1}{2}$ AI : окр. $BI \times \frac{1}{2}$AB, сокративъ члены 2-го отношенія на $\frac{1}{2}$ окр. BI, получимъ:

пл. кр. BI : пов. кон. AB=BI : AB;

но изъ подобія прямоуг. треуг. ABI и AMC (потому что они сверхъ прямыхъ угловъ имѣютъ общій уголъ A),

слѣдуетъ: BI : AB=MC : AC

посему пл. кр. BI : пов. кон. AB=MC : AC,

откуда пл. кр. $BI \times AC$=пов. кон. $AB \times MC$.

И такъ, вставивъ въ уравн. (1) равныя величины вмѣсто равныхъ получимъ:

об. дв. кон. ABC=пов. кон. $AB \times \frac{1}{3}MC$,

то есть, объемъ частнаго тѣла вращенія ABC равняется поверхности вращенія производящей прямой AB, умноженной на $\frac{1}{3}$ радіуса даннаго полукруга, или, что все равно, $\frac{1}{3}$ радіуса шара.

Такимъ же образомъ выведемъ, что

об. дв. кон. NDC=пов. кон. $ND \times \frac{1}{3}$ CP,

об. дв. кон. NBC=пов. кон. $ND \times \frac{1}{3}$ CP;

слѣд. вычтя второе уравненіе изъ перваго, получимъ:

об. тѣл. вращ. BDC=пов. произв. прям. $BD \times \frac{1}{3}$ CP,

то есть, объемъ тѣла вращенія BDC также равняется поверхности производящей прямой BD, умноженной на $\frac{1}{3}$ радіуса шара. И такъ, означивъ радіусъ полукруга, или радіусъ шара, чрезъ R, получимъ:

об. тѣл. вращ. ABC=пов. произв. прям. $AB \times \frac{1}{3}R$

— — — BDC=пов. — — $BD \times \frac{1}{3}R$

— — — DEC=пов. — — $DE \times \frac{1}{3}R$

и т. д.

А изъ сего слѣдуетъ, *объемъ тѣла вращенія равняется суммѣ поверхностей всѣхъ производящихъ прямыхъ* (AB+BD+DE....) *или цѣлой поверхности тѣла вращенія, умноженной на $\frac{1}{3}$ радіуса.*

II. Представимъ себѣ, что въ полукругѣ *a*MP*b* вписанъ правильный полумногоугольникъ, который также обращается около своей оси. Описанное имъ тѣло вращенія будетъ (§ 533. I.) равняться своей поверхности, умноженной на апоѳемы. А какъ разность между поверхностями описаннаго около шара тѣла вращенія и вписаннаго въ немъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины (§ 523), точно такъ какъ и разность между радіусомъ круга и апоѳемою вписаннаго правильнаго многоугольника можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, и притомъ объемъ шара заключается между объемами обоихъ тѣлъ вращенія, то и очевидно, что разность между объемомъ шара и объемомъ каждаго изъ тѣлъ вращенія тѣмъ болѣе можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины.

534. Основываясь на послѣднемъ заключеніи можно шаръ принять за такое тѣло вращенія, коего поверхность сливается съ поверхностью шара, а ось совмѣщается съ діаметромъ; а изъ сего бы слѣдовало: что *объемъ шара равняется его поверхности, умноженной на $\frac{1}{3}$ радіуса.*

Пусть объемъ тѣла вращенія, описаннаго около шара=V′, поверхность его=S′, объемъ шара=V, а его поверхность=s; сверхъ сего пусть V′—V=Y, а S′—s=y. Изъ § 533 слѣдуетъ, что

$V' = S' \times \frac{r}{3}$,

а какъ $V' = V + Y$, а $S' = s + y$,

то $V + Y = (s+y) \times \frac{1}{3}r$,

или $V + Y = s \times \frac{1}{3}r + y \times \frac{1}{3}r$,

откуда, по § 247, $V = s \times \frac{1}{3} r$, что и доказать надлежало.

535. Чтобы опредѣлить объемъ сферическаго сектора, происходящаго отъ обращенія круг. сектора, EFC (черт. 260) около радіуса EC, должно его сравнить съ объемомъ части тѣла вращенія, происходящей отъ обращенія части полумногоугольника ERSTF, и мы убѣдимся, дѣлая подобныя соображенія, какія дѣлали при опредѣленіи объема цѣлаго шара, что и *объемъ сферическаго сектора равняется его поверхности, умноженной на $\frac{1}{3}$ радіуса.*

536. Такъ какъ объемъ сферическаго сектора (черт. 260) EECG состоитъ изъ сферическаго сегмента EFG и конуса CFG, то для опредѣленія объема сферическаго сегмента EFG слѣдуетъ изъ объема сферическаго сектора вычесть объемъ конуса CFG, имѣющаго общее основаніе съ сегментомъ и вершину въ центрѣ.

537. Означимъ радіусъ шара чрезъ r, то поверхность его будетъ вы-

ражена чрезъ $4\pi r^2$ (§ 525); а объемъ шара$=4\pi r^2 \times {}^1/_3\, r={}^4/_3\pi r^3={}^8/_6\pi r^3=\frac{\pi}{6}8r^3=\frac{\pi}{6}D^3$ (ибо $2r$=діам. D, а $8r^3$=D)^3.

IV. Объ отношеніи поверхностей и объемовъ тѣлъ вращенія.

538. Такъ какъ поверхность прямаго цилиндра равняется окружности основанія, умноженной на высоту, то изъ того и слѣдуетъ, что поверхности двухъ прямыхъ цилиндровъ относятся какъ произведенія окружностей ихъ основаній на высоты.

По той же причинѣ объемы двухъ цилиндровъ относятся между собою такъ какъ произведенія площадей ихъ основаній на ихъ высоты.

539. Такимъ же образомъ выводится, что поверхности двухъ прямыхъ конусовъ относятся между собою такъ какъ произведенія изъ окружностей основаній на стороны, а объемы ихъ какъ произведенія изъ площадей основаній на высоты.

540. Изслѣдуемъ теперь отношеніе поверхностей и объемовъ *подобныхъ* тѣлъ вращенія. Подобными тѣлами вращенія называются такія, которыя происходятъ отъ подобныхъ производящихъ фигуръ. И такъ *подобные прямые цилиндры* суть тѣ (черт. 264), которые происходятъ отъ обращенія подобныхъ прямоугольниковъ ABCD, *abcd;* а изъ сего слѣдуетъ, что въ подобныхъ цилиндрахъ высоты BC и bc должны быть пропорціональны радіусамъ основаній DC и dc или діаметрамъ DF, df. *Подобные прямые конусы* (черт. 265) происходятъ отъ обращенія подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABC и abc; и посему въ нихъ стороны AB, ab, высоты AC и ac, и радіусы основаній BC и bc пропорціональны.

Такъ какъ цѣлые круги и полукруги суть подобныя фигуры, то изъ того и слѣдуетъ, что всѣ шары суть подобныя тѣла вращенія.

541. Означивъ поверхности подобныхъ цилиндровъ (черт. 264) чрезъ S, s, а объемы чрезъ V, v, получимъ по § 538.

$$S : s = 2\pi DC\times BC : 2\pi dc\times bc,$$

или сокративъ члены 2-го отношенія на 2π

$$S : s = DC\times BC : dc\times bc \quad (1);$$

но, изъ § 540 слѣдуетъ: $DC : dc = BC : bc$,

умноживъ предъидущіе члены на BC, а послѣдующіе на bc, будемъ имѣть

$$DC\times BC : dc\times bc = \overline{BC^2} : \overline{bc^2} \quad (2)$$

И такъ изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ, что

$$S : s = \overline{BC^2} : \overline{bc^2}$$

то есть, *поверхности подобныхъ цилиндровъ относятся между собою такъ какъ квадраты сходственныхъ линій.*

542. Изъ § 538 извѣстно, что $V : v = \overline{\pi DC^2}\times BC : \overline{\pi dc^2}\times bc$,

или $$V : v = DC^2\times BC : \overline{dc^2}\times bc \quad (3)$$

но, по § 540, $$DC : dc = BC : bc,$$

слѣд. $$\overline{DC^2} : \overline{dc^2} = \overline{BC^3} : \overline{bc^3};$$

умноживъ предъидущіе члены на BC, а послѣдующіе на bc, будемъ имѣть:

$$DC^2\times BC : \overline{dc^2}\times bc = \overline{BC^3} : \overline{bc^3} \quad (4)$$

или $$V : v = \overline{BC^3} : \overline{bc^3}$$

то есть: *объемы двухъ подобныхъ цилиндровъ относятся между собою какъ кубы сходственныхъ линій.*

543. Подобнымъ образомъ можно вывести отношенія между поверхностями и объемами двухъ подобныхъ конусовъ ABD и abd (черт. 265). Означивъ ихъ поверхность чрезъ S, s, а объемы чрезъ V, v, получимъ:

$$S : s = 2\pi BC\times AB : 2\pi bc\times ab \ (\text{§ } 539)$$

или $$S : s = BC\times AB : bc\times ab \quad (1)$$

но (§ 540) $$BC : bc = AB : ab,$$

умноживъ предъидущіе члены на AB, а послѣдующіе на ab, получимъ:

$$BC\times AB : bc\times ab = \overline{AB^2} : \overline{ab^2} \quad (2)$$

И такъ изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ, что

$$S : s = AB^2 : ab^2$$

то есть, *поверхности подобныхъ конусовъ относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ линій.*

544. Такимъ же образомъ можно доказать, что *объемы подобныхъ конусовъ относятся между собою какъ кубы сходственныхъ линій.*

545. Сравнимъ теперь поверхности и объемы двухъ шаровъ. Означимъ поверхности ихъ чрезъ S и s; объемы чрезъ V, v; радіусы чрезъ R, r; а діаметры чрезъ D и d.

Изъ § 525 намъ извѣстно, что

$$S=4\pi R^2, \text{а } s=4\pi r^2,$$

слѣд. $$S : s = 4\pi R^2 : 4\pi r^2$$

или $$S : s = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

то есть, *поверхности двухъ шаровъ относятся какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.*

Въ § 537 выведено, что

$$V={}^4/_3\pi R^3, v={}^4/_3\pi r^3,$$

слѣд. $$V : v = {}^4/_3\pi R^3 : {}^4/_3\pi r^3;$$

сокративъ члены 2-го отношенія на ${}^3/_4\ \pi$, получимъ:

$$V : v = R^3 : r^3 = D^3 : d^3$$

то есть, *объемы двухъ шаровъ относятся между собою какъ кубы радіусовъ или діаметровъ.*

546. Сравнимъ еще поверхность и объемъ шара съ поверхностью и объемомъ описаннаго цилиндра. Подъ описаннымъ цилиндромъ разумѣютъ такой цилиндръ, коего выпуклая поверхность и площади обоихъ основаній

касаются поверхности шара. Такъ какъ таковой цилиндръ имѣетъ высоту равную діаметру основанія, то онъ называется *равносторонним*. Означивъ поверхность шара буквою S, выпуклую поверхность цилиндра чрезъ S', всю его поверхость чрезъ S''; объемъ шара чрезъ V, объемъ цилиндра чрезъ V', радіусъ шара или радіусъ основанія цилиндра чрезъ R, получимъ:

I.
$$S=4\pi R^2 \quad (\S\ 525),$$
$$\text{а } S'=2\pi R\times 2R=4\pi R^2 \quad (\S\ 515),$$

то есть, *поверхность шара равняется выпуклой поверхности описаннаго цилиндра.*

Чтобы опредѣлить всю поверхность цилиндра, которую означимъ чрезъ S'', должно къ боковой поверхности прибавить площади обоихъ основаній. Площадь основанія (черт. 266) CBD=πr^2, слѣд. сумма обоихъ основаній =$2\pi R^2$. Посему вся поверхность описаннаго цилиндра, или
$$S''=S'+2\pi R^2=4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2.$$
А изъ сего слѣдуетъ, что
$$S'' : S=6\pi R^2 : 4\pi R^2.$$
или
$$S'' : S= 3 : 2$$
то есть, *вся поверхность описаннаго цилиндра относится къ поверхности шара, такъ какъ* 3 : 2.

II.
$$V=\tfrac{4}{3}\pi R^3 \quad (\S\ 537)$$
$$V'=\pi R^2\times 2R=2\pi R^3 \quad (\S\ 529)$$
$$\text{слѣд. } V : V'=\tfrac{4}{3}\pi R^2 : 2\pi R^2=\tfrac{4}{3} : 2=4 : 6$$
то есть *объемъ шара относится къ объему описаннаго цилиндра тоже какъ* 2 : 3.

Глава IV.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПРЕДЪИДУЩИМЪ ГЛАВАМЪ СТЕРЕОМЕТРІИ.

547. *Опредѣлить боковую поверхность правильной четырехсторонней пирамиды, коей сторона основанія равна 2 саж., а ребро 8 саженямъ.*

Изъ § 452 извѣстно, что боковая поверхность правильной пирамиды равна периметру основанія, умноженному на половину апоѳемы. Периметръ основанія въ семъ случаѣ равняется 2 саж.×4=8 саж. И такъ остается опредѣлить апоѳему. Апоѳема раздѣляетъ сторону основанія пополамъ, и образуетъ прямоугольные треугольники, въ которыхъ ребра пирамиды представляютъ гипотенузы, а апоѳема и обѣ половины стороны суть катеты; слѣд. (§ 223).
$$\text{апоѳема}=\sqrt{8^2-1^2}=\sqrt{63}=7.94\ldots \text{ саж.}$$

Итакъ боковая поверхность пирамиды будетъ
$$=8 \text{ саж.}\times\frac{7,94\ldots}{2}\text{саж.}=31.7\ldots \text{ квадр. саж.}$$

548. *Опредѣлить вмѣстимость колодца, коего глубина* =10 фут., *а длина и ширина по 6 футовъ.*

Вмѣстимость эта равняется объему прямаго параллелепипеда, имѣющаго показанныя измѣренія: слѣд. вмѣстимость колодца будетъ (§ 465)=6 ф. ×6 ф.×10 ф.=360 куб. фут.

549. *Опредѣлить объемъ какого нибудь неправильнаго многоугольника или неправильнаго тѣла (приблизительно).*

Если данное тѣло не распускается въ водѣ, то его кладутъ въ пустой прямоугольный параллелепипедъ, коего всѣ три измѣренія извѣстны, и дополняютъ оный водою до извѣстной высоты. Потомъ вынимаютъ измѣряемое тѣло съ осторожностью, чтобы вода не вылилась. Умноживъ площадь основанія на число, показывающее на сколько единицъ линейной мѣры уменьшилось высоты, найдемъ объемъ даннаго тѣла.

Объяснимъ примѣромъ. Пусть сторона основанія = 5 дюйм., а высота, до которой наливаютъ воду пусть будетъ = 8 дюймовъ. И такъ объемъ даннаго тѣла вмѣстѣ съ объемомъ налитой воды=5 д.×5. д.×8 д.= 200 кубич. дюймамъ. Пусть когда тѣло было вынуто, то высота уменьшилась до 5½ дюйм., то

объемъ оставш. воды=5 д.×5 д.×5½ д.=147½ куб. д.

слѣд. объемъ измѣр. тѣла = 200 куб. д. — 137½ куб. д. = 62½ куб. д. Это самое число получится, если площадь основанія (=5 д. ×5 д.=25 кв. д.) умножить на 2½, то есть, на число дюймовъ, на которое высота уменьшилась.

Очевидно, что такое опредѣленіе объема не имѣетъ совершенной точности, и можетъ быть допущено только въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ довольствуются приблизительнымъ вычисленіемъ. Если данное тѣло распускается въ водѣ, то въ такомъ случаѣ вода замѣняется мелкимъ пескомъ, или тому подобнымъ тѣломъ.

550. *Найти высоту прямаго усѣченнаго параллельно основанію конуса* EDAB (черт. 262), *коего сторона* DA=5'', *радіусъ нижняго основанія* OA=7'', *верхняго* GD=4''.

Проведя DI параллельно SO составимъ прямоугольный треугольникъ DAI, въ которомъ гипотенуза DA=5'', а катетъ AI=

AO—DG=7''—4''=3'':

слѣд. $DI=\sqrt{DA^2-AI^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$

посему DI=4''.

551. *Найти поверхность и объемъ земнаго шара принимая его за совершенную сферу.*

1. Намъ извѣстно, что окружность экватора раздѣляется на 360 градусовъ, и въ каждомъ градусѣ 15 географ. миль; слѣд окружность экватора равна 15 мил. $\times 360 = 5400$ географическимъ милямъ. А изъ этого слѣдуетъ, что радіусъ земнаго шара

$$=\frac{5400}{\frac{335}{113}.2}=\frac{5400.113}{710}=\frac{540.113}{71},$$ и посему поверхность земнаго шара

$$(\S\ 525)=4.\frac{355}{113}.\left(\frac{540.113}{71}\right)^2.$$ Произведя показанныя дѣйствія, найдемъ, что

$$\text{пов. земнаго шара}=9,281.915\frac{25}{71}\ \text{геогр. кв. миль.}$$

II. Изъ § 534 извѣстно, что объемъ всякаго шара равняется его поверхности, умноженной на $^1/_3$ радіуса;

$$\text{слѣд. объемъ земнаго шара}=9.281.915\frac{35}{71}\times\frac{540.113}{71.3}$$

$$=2659072691\frac{4667}{5041}\ \text{куб. геогр. миль.}$$

552. *Найти радіусъ шара, коего поверхность равна* 100 *кв. дюймамъ.*

Пусть искомый радіусъ $=x$, то изъ § 525 слѣдуетъ, что поверхность шара равняется $4\pi x^2$; но, по условію задачи, она равна 100 квадр. дюйм. слѣд.

$$4\pi x^2=100.$$
$$4\frac{22}{7}x^2=100$$
$$x^2=\frac{175}{22}=7,95454....$$
$$x=2,820....\ \text{лин. дюйм.}$$

553. *Найти поверхность усѣченнаго параллельно основанію прямаго конуса, коего сторона* CE$=k$, (черт. 244), *радіусъ верхняго основанія*$=r$, *нижняго*$=$R.

Для краткости означимъ сторону цѣлаго конуса AC чрезъ S′, а сторону отсѣченнаго конуса AE чрезъ s,

(по § 518) $$\text{пов. цѣл. кон. ACD}=2\pi R.\frac{S'}{2}$$

$$\text{пов. отсѣч. кон. AEG}=2\pi r.\frac{s}{2},$$

слѣд. $$\text{пов. усѣч. кон. EGDC}=2\pi R.\frac{S'}{2}-2\pi r.\ \frac{s}{2}$$

$$=2\pi\left(\frac{RS'-rs}{2}\right)\ (1)$$

Введемъ въ послѣднее выраженіе сторону усѣченнаго конуса; для сего составимъ пропорцію, проистекающую изъ подобія треуг. ACB и AEF

$$S' : s=R : r$$

откуда $S-s : S=R-r : R$, посему $S'=\frac{S'-s}{R-r}.\ R=\frac{k\ .\ R}{R-r}$

также $S-s : s=R-r : r$, посему $s=\frac{S'-s}{R-r}.\ r=\frac{k\ .\ r}{R-r}$

Вставивъ въ уравн. (1) равныя величины вмѣсто равныхъ, получимъ:

$$\text{поверх. усѣч. конуса EGDC}=2\pi\frac{(R^2k-r^2k)}{2(R-r)}-2\pi k.\ \frac{(R^2-r^2)}{2(R-r)}.$$

$$=2\pi k\left(\frac{R+r}{2}\right)=\frac{k}{2}(2\pi R+2\pi r);$$

но $2\pi R$ означаетъ окружность нижняго, а $2\pi r$ окружность верхняго основанія; слѣд. поверхность усѣченнаго прямаго конуса равняется суммѣ окружностей обѣихъ основаній, умноженной на половину стороны. Выраженіе это совершенно сходно съ тѣмъ, которое было выведено въ параграфѣ 519.

554. *Опредѣлить объемъ усѣченнаго прямаго конуса* EGDC (черт. 244).

Означимъ для краткости и удобности CB чрезъ R, EF чрезъ r, высоту AB чрезъ H, AF буквою h', а FB равную $H-h'$ буквою h.

$$\text{Объемъ цѣл. кон. ACD}=\pi R^2\frac{H}{3}(\S\ 530),$$

$$\text{об. отсѣч. кон. AEG}=\pi r^2\frac{h}{3},$$

слѣд. $$\text{об. усѣч. кон. EGDC}=\pi R^2\frac{H}{3}=\pi r^2\ \frac{h'}{3}\ (1)$$

Чтобъ ввести въ послѣднее выраженіе высоту усѣченнаго конуса, составимъ изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и AEF пропорцію:

$$R : r=H : h',$$

откуда $R-r : R=H-h' : H$, посему $H=\frac{R(H-h')}{R-r}=\frac{R\ .\ h}{R-r}.$

и $R-r : r=H-h' : h'$, посему $h'=\frac{r\ (H-h')}{R-r}=\frac{r\ .\ h}{R-r},$

слѣд. вставивъ въ уравн. (1) равныя величины вмѣсто равныхъ, получимъ:

$$\text{объемъ усѣч. кон. EGDC}+\frac{\pi R^2h}{3(R-r)}-\frac{\pi r^3h}{3(R-r)}=\frac{\pi h.R^3-r)}{3(R-r)}$$

раздѣливъ R^3-r^3 на $R-r$, будемъ имѣть:

$$\text{объемъ усѣч. кон. EGDC}=\frac{h}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)$$

$$=\frac{h}{3}(\pi R^2+\pi Rr+\pi r^2).$$

Выраженіе это совершенно сходно съ тѣмъ, которое было выведено въ § 531.

555. *Найти выраженіе для объема* (черт. 248) *сферическаго сегмета* AFKG, *коего высота* $AK=h$, *а радіусъ*$=R$.

Чтобы найти объемъ сферич. сегмента AFKG, должно изъ объема сферич. сектора AFCG вычесть объемъ конуса CFKG.

$$\text{Об. сект. } AFCG=2\pi Rh\frac{R}{3}(\S\ 536)=\pi^2R^2h \quad (1)$$

$$\text{об. кон. } CFKG=\pi FK^2\times\frac{KC}{3}(\S\ 530)$$

$$=\pi(2R-h)h.\frac{(R-h)}{3}=\frac{u}{3}(2Rh-h^2)\ (R-h)$$

$$=\frac{\pi}{3}(2R^2h-Rh^2-2Rh^2+h^3)$$

$$=\frac{\pi}{3}(2R^2h-3Rh^2+h^3)$$

$$={}^2/_3\ \pi R^2h-\pi Rh^2+\frac{\pi}{3}h^3 \quad (2)$$

$$\text{слѣд. об. сегмента } AFKG={}^2/_3\pi R^2-\left({}^2/_3\pi R^2/_2h^2-\pi Rh^2+\frac{\pi}{3}h^3\right)$$

$$={}^2/_3\pi R^2h-{}^2/_3\pi R^2h+\pi Rh^2-\frac{\pi h^2}{3}$$

$$=\pi Rh-\frac{\pi h^3}{3}$$

$$=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right);$$

то есть *объемъ сферическаго сегмента равномѣренъ цилиндру, имѣющему радіусомъ основанія высоту* h, *а высотою радіусъ шара, уменьшенный одною третью высоты сегмента.*

556. *Найти выраженіе для объема шароваго пояса* GHFE (ч. 261) *коего высота* $KL=H$, *радіусъ нижняго основанія*$=r'$, *верхняго*$=r$.

Объемъ шароваго пояса GHFE равняется разности объемовъ сферическихъ сегментовъ AEF и AGH. Удержавъ означенія предъидущаго параграфа, то есть, пусть $AL=h'$ $AK=h$, получимъ,

$$\text{об. сферич. сегм. } AEF=\pi h'^2\left(R-\frac{h'}{3}\right)\quad(\S\ 555).$$

$$\text{об. сферич сегм. } AGH=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

$$\text{слѣд. об. шар. пояса } GHFE=\pi h'^2\left(R-\frac{h}{3}\right)-\pi h^3\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

$$=\pi h'^2R-\frac{\pi h'^3}{3}-\pi h^2R+\pi\frac{h^2}{3}$$

$$=\pi R(h'^2-h^2)-{}^1/_3\pi(h'^3-h^3)$$

Такъ какъ въ обоихъ членахъ $h'-h$, или H, есть общій множитель, то поставивъ πH за скобки, получимъ:

$$\text{об. шар. пояса } GHFE=\pi H\left[R(h'+h)-{}^1/_3(h'^2+h'h+h^2)\right]\ \pi(1)$$ о изъ § 220 извѣстно, что

$$r'^2=2Rh'-h'^2$$
$$r^2=2Rh-h^2$$

слѣд.
$$r'+r^2=2R(h'+h)-(h'^2+h^2),$$

откуда
$$R(h'+h)=\frac{r'^2+r^2}{2}+\frac{h'^2+h^2}{2} \quad (2)$$

Вставивъ въ урав. (1) найденное выраженіе, получимъ:

$$\text{об. шар. пояса } GHFE=\pi H\left(\frac{r'^2+r^2}{2}+\frac{h'^2+h^2}{2}-\frac{h'^2+h'h+h^2}{3}\right)$$

$$=\pi H\left(\frac{r'^2+r^2}{2}+\frac{h'^2-2h'h+h^2}{6}\right)$$

$$=\pi H\left(\frac{r'^2+r^2}{2}+\frac{(h'-h)^2}{6}\right)$$

$$=\pi H\left(\frac{r'^2+r}{2}+\frac{H^2}{6}\right)$$

$$=\frac{\pi r^2+\pi r^2}{2}.\ H+\frac{\pi H^3}{6},$$

то есть, *объемъ шароваго пояса равномѣренъ цилиндру, коего основаніе ревняется полусуммѣ основаній пояса, а высота высотѣ пояса. сложенному съ объемомъ шара, коего діаметръ равняется высотѣ пояса* (§ 537).

557. *Найти отношеніе поверхности тара къ цѣлой поверхности описаннаго цилиндра и къ цѣлой поверхности описаннаго равносторонняго конуса.*

Означивъ радіусъ шара буквою R, получимъ для поверхности шара $4\pi R^2$, а для цѣлой поверхности цилиндра $6\pi R^2$.

Такъ какъ около шара описанный конусъ полагается равностороннимъ, то есть, сторона его равняется діаметру основанія, то изъ того слѣдуетъ, что плоскость сѣченія, проходящая чрезъ ось конуса, есть равносторонній треугольникъ, описанный около большаго круга шара. Изъ § 325 и 326 извѣстно, что сторона равносторонняго треугольника, описаннаго около круга, коего радіусъ$=R$, равняется $2R\sqrt{3}$; слѣд. сторона конуса и діаметръ его основанія$=2R\sqrt{3}$. Посему боковая поверхность конуса (§ 518) $=\pi.2R\sqrt{3}\times R\sqrt{3}\pi-6R^2$; а площадь основанія конуса$=\pi(R\sqrt{3})^2$ (§ 278) | $3\pi R^2$. И такъ вся поверхность описаннаго конуса$=9\pi R^2$ А изъ сего слѣдуетъ, что *поверхность шара относится ко всей поверхности описаннаго цилиндра и равносторонняго конуса такъ какъ*

$$4\pi R^2 : 6\pi R^2 : 9\pi R=4 : 6 : 9$$

Такъ какъ 6 есть среднее пропорціональное число между 4 и 9, то изъ того и слѣдуетъ, что *вся поверхность описаннаго цилиндра есть сред-*

няя геометрическая величина между поверхностью шара и всею поверхностью описаннаго равносторонняго конуса.

558. *Найти отношеніе объема шара къ объему описаннаго цилиндра и объему описаннаго равносторонняго конуса.*

Означивъ радіусъ шара чрезъ R, объемъ шара чрезъ V; объемъ цилиндра чрезъ V′, объемъ конуса чрезъ V″, получимъ:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\ (\S\ 537),\ V'=2\pi R^3\ (\S\ 529).$$

Чтобы найти объемъ конуса, должно сперва опредѣлить его высоту. Высота его сливается съ осью, и представляетъ катетъ прямоугольнаго треугольника, въ коемъ гипотенуза есть сторона конуса, и посему (§ 557) $=2R\sqrt{3}$, а другой катетъ равенъ радіусу основанія, то есть $R\sqrt{3}$. Изъ сего же слѣдуетъ, что высота конуса $=\sqrt{(2R\sqrt{3})^2-(R\sqrt{3})^2}=\sqrt{12R^2-3R^2}=\sqrt{9R^3}=3R$.

Площадь же основанія описаннаго конуса $=\pi(R\sqrt{3})^2$ (§ 278) $=3\pi R^2$. Умноживъ (§ 530) площадь основанія на треть высоты, получимъ:

$$V''=3\pi R^2\times\frac{3R}{3}=3\pi R^3.$$

Итакъ $V : V' : V'' = \frac{4}{3}\pi R^3 : 2\pi R^3 : 3\pi R^3$

$= 4 : 6 : 9.$

изъ чего и заключаемъ, что объемы этихъ тѣлъ относятся между собою какъ ихъ поверхности.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Глава V. различныя задачи для упражненія.

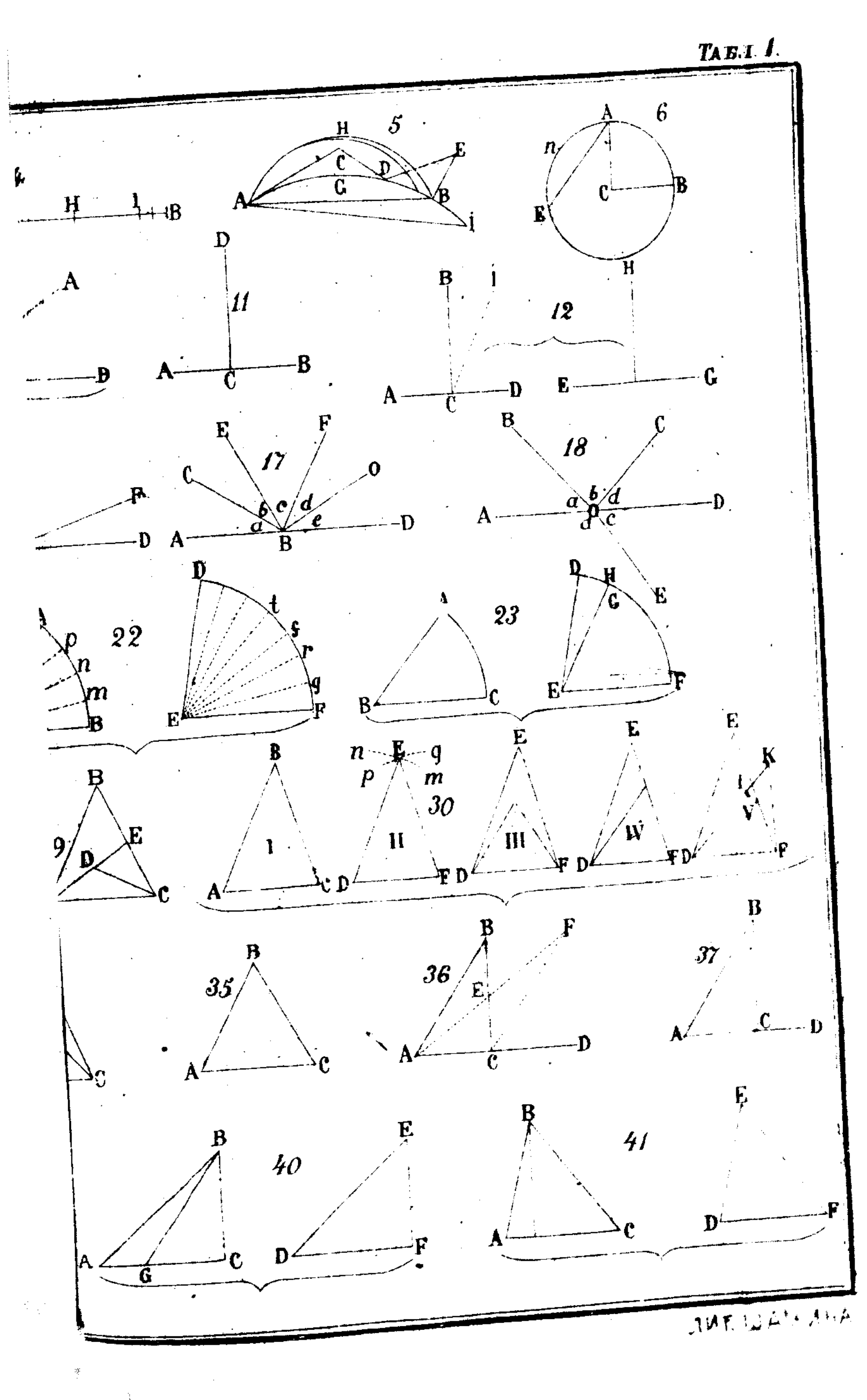
СТЕРЕОМЕТРІЯ.

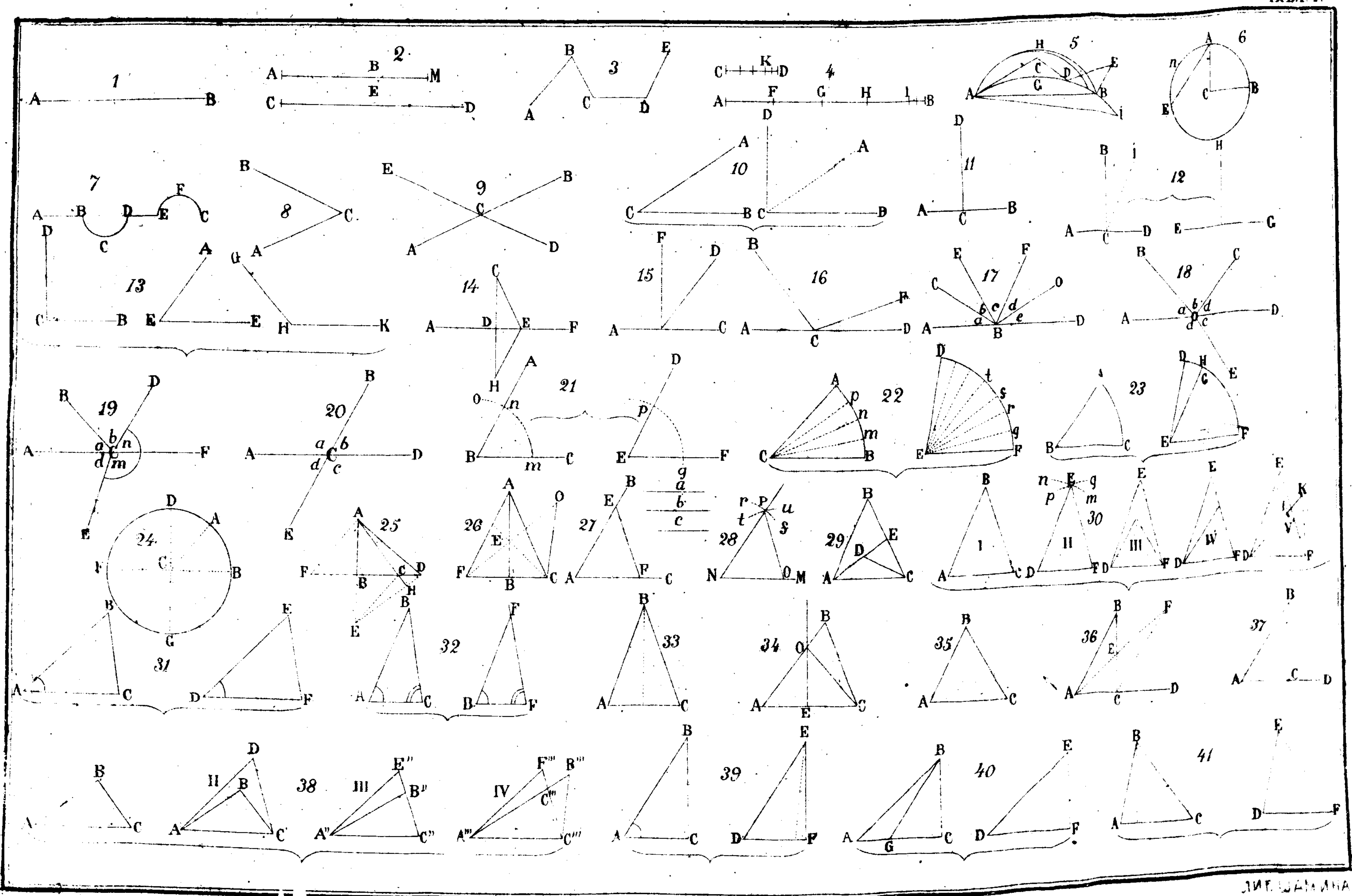
Глава I. о положеніи прямыхъ въ разныхъ плоскостяхъ находящихся, взаимномъ положеніи плоскостей; о плоскостныхъ и многогранныхъ углахъ.

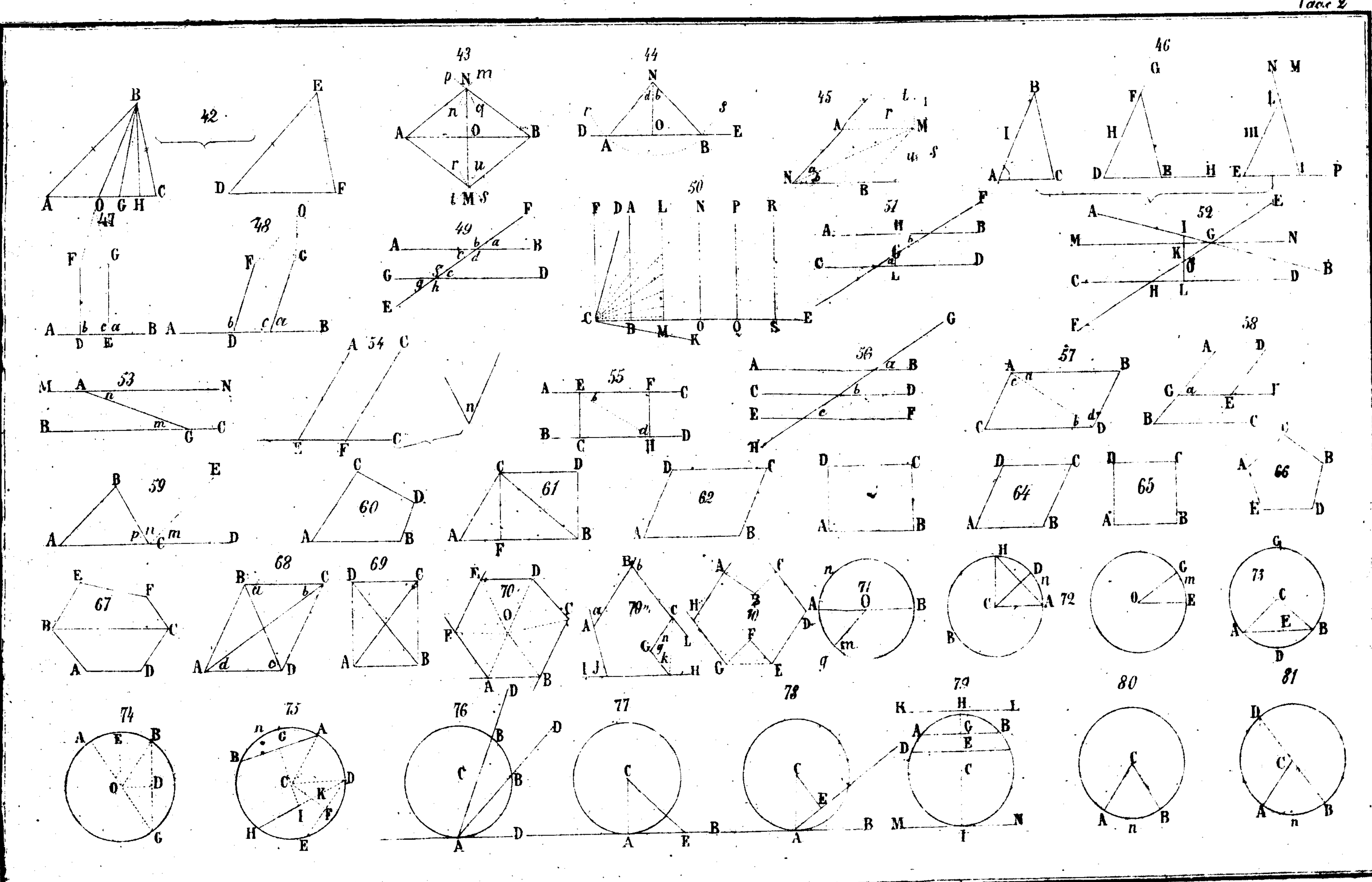
Глава II. о многогранникахъ.

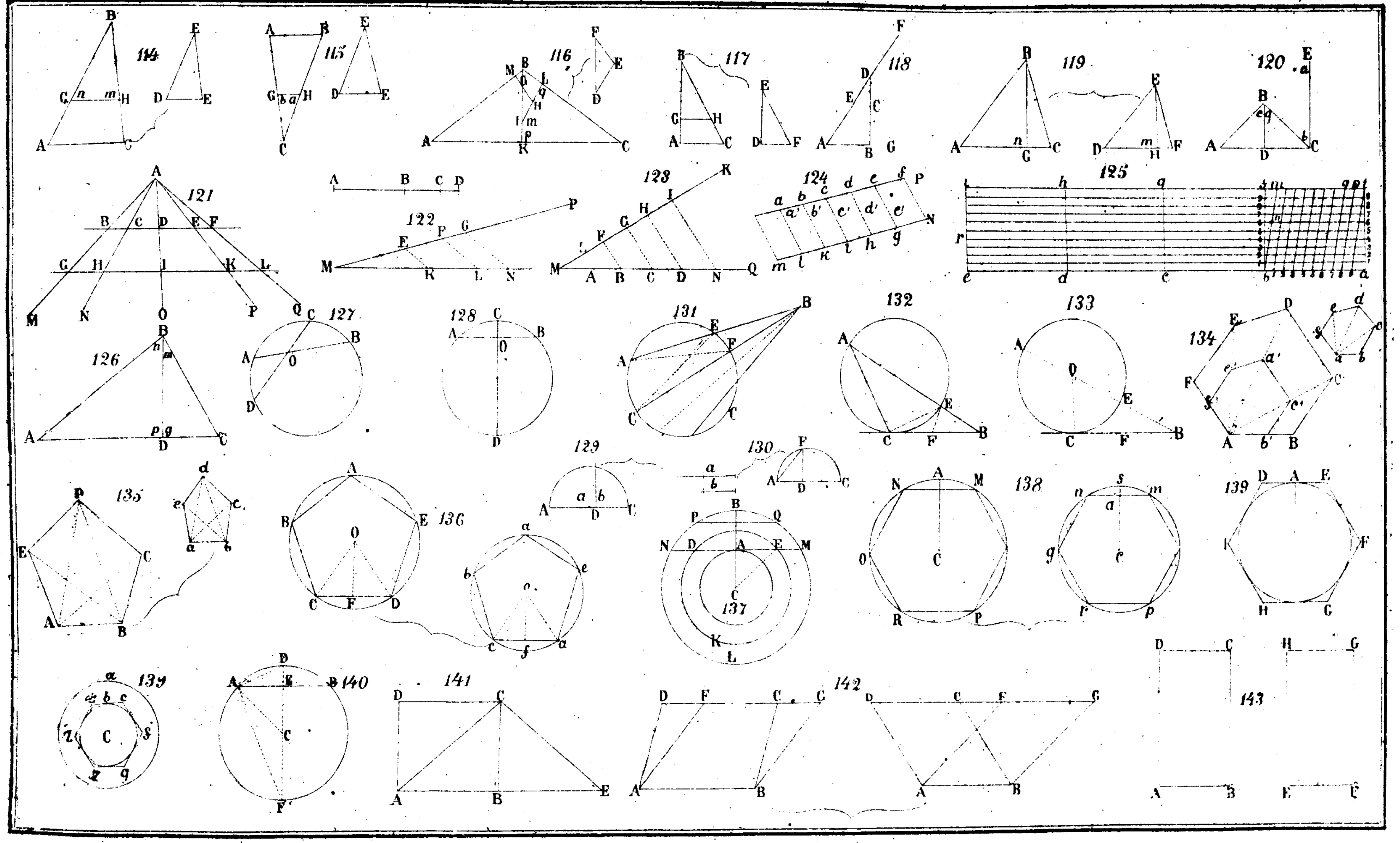
Глава III. о тѣлахъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями.

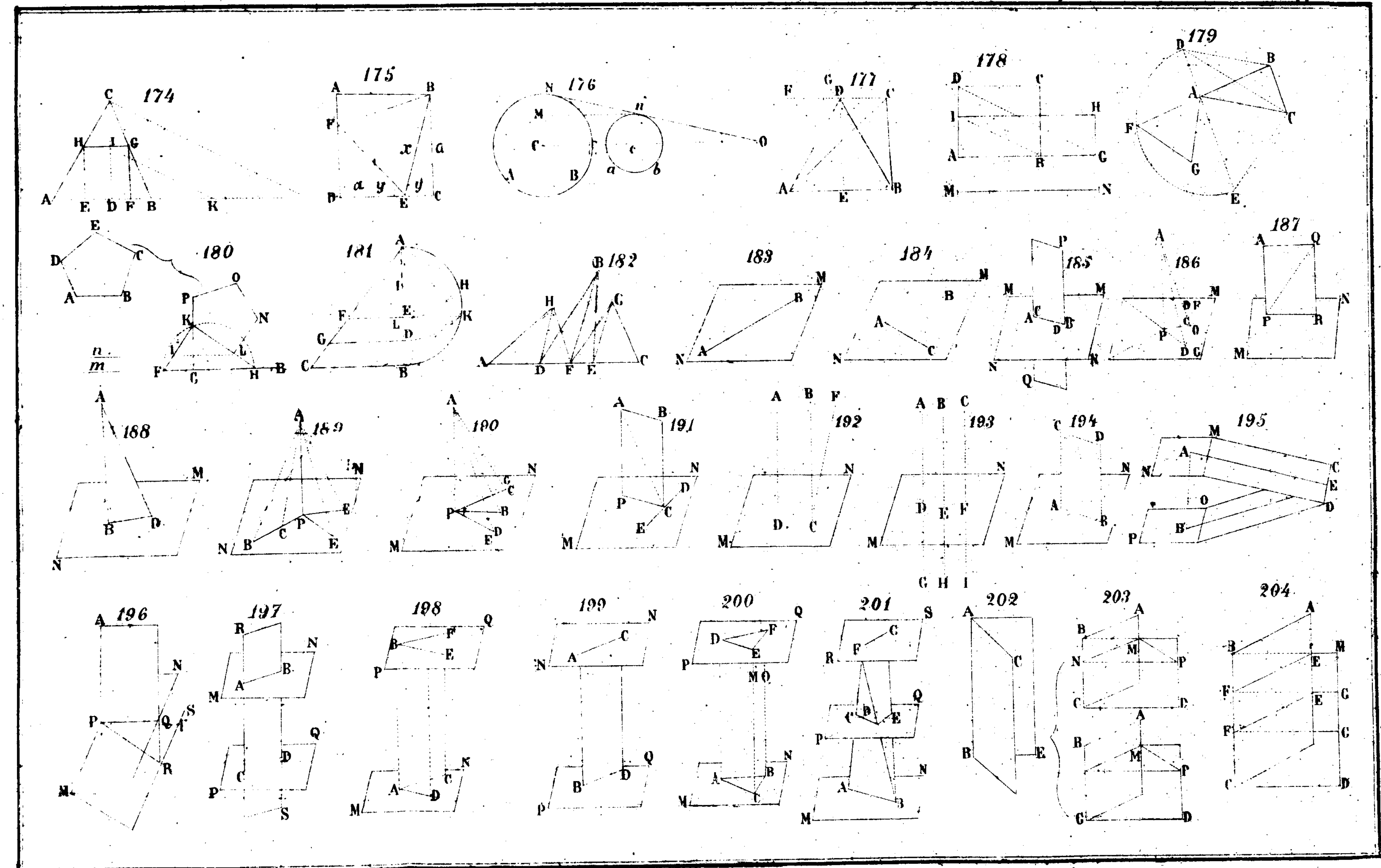
Глава IV.



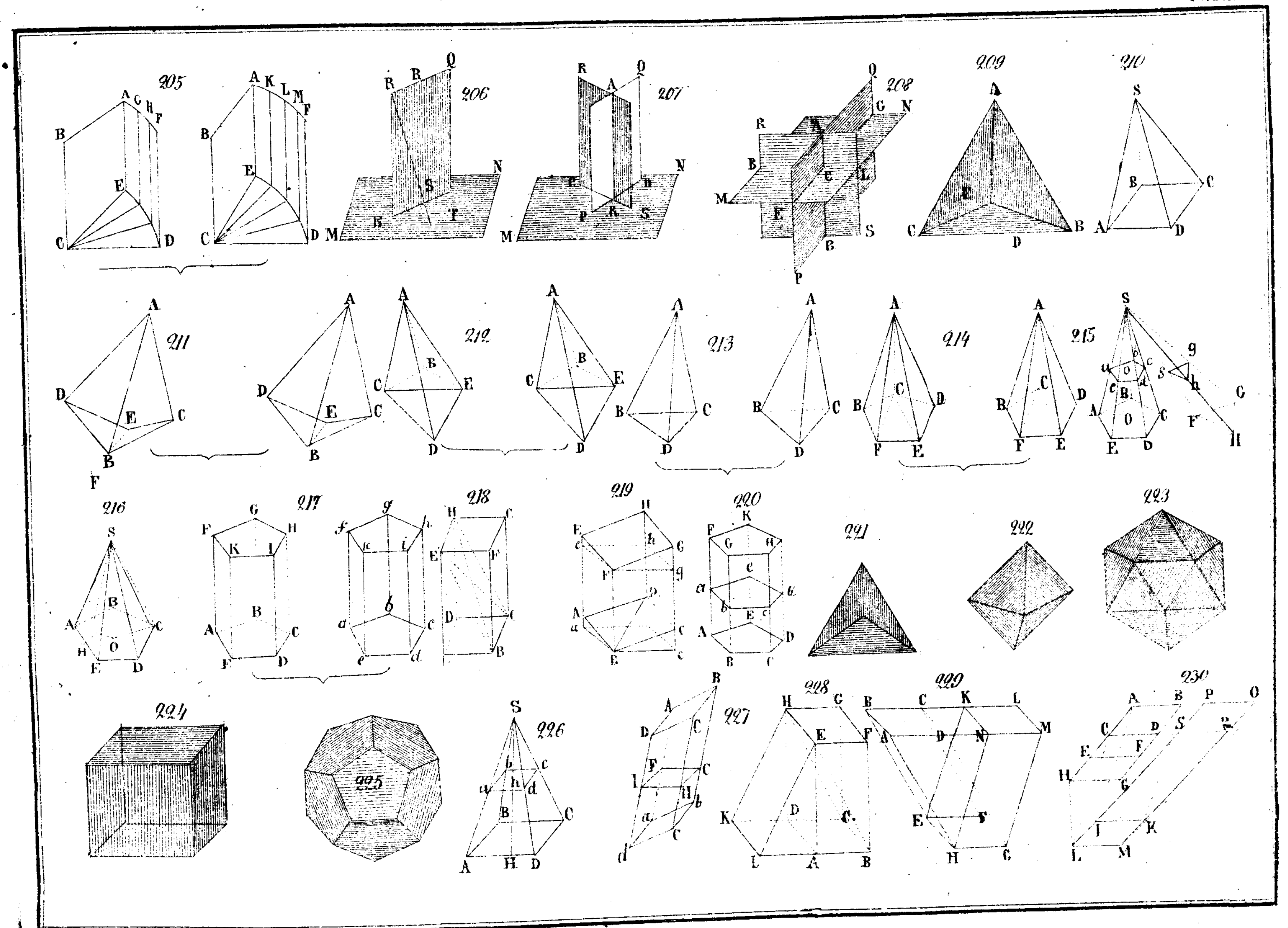

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41

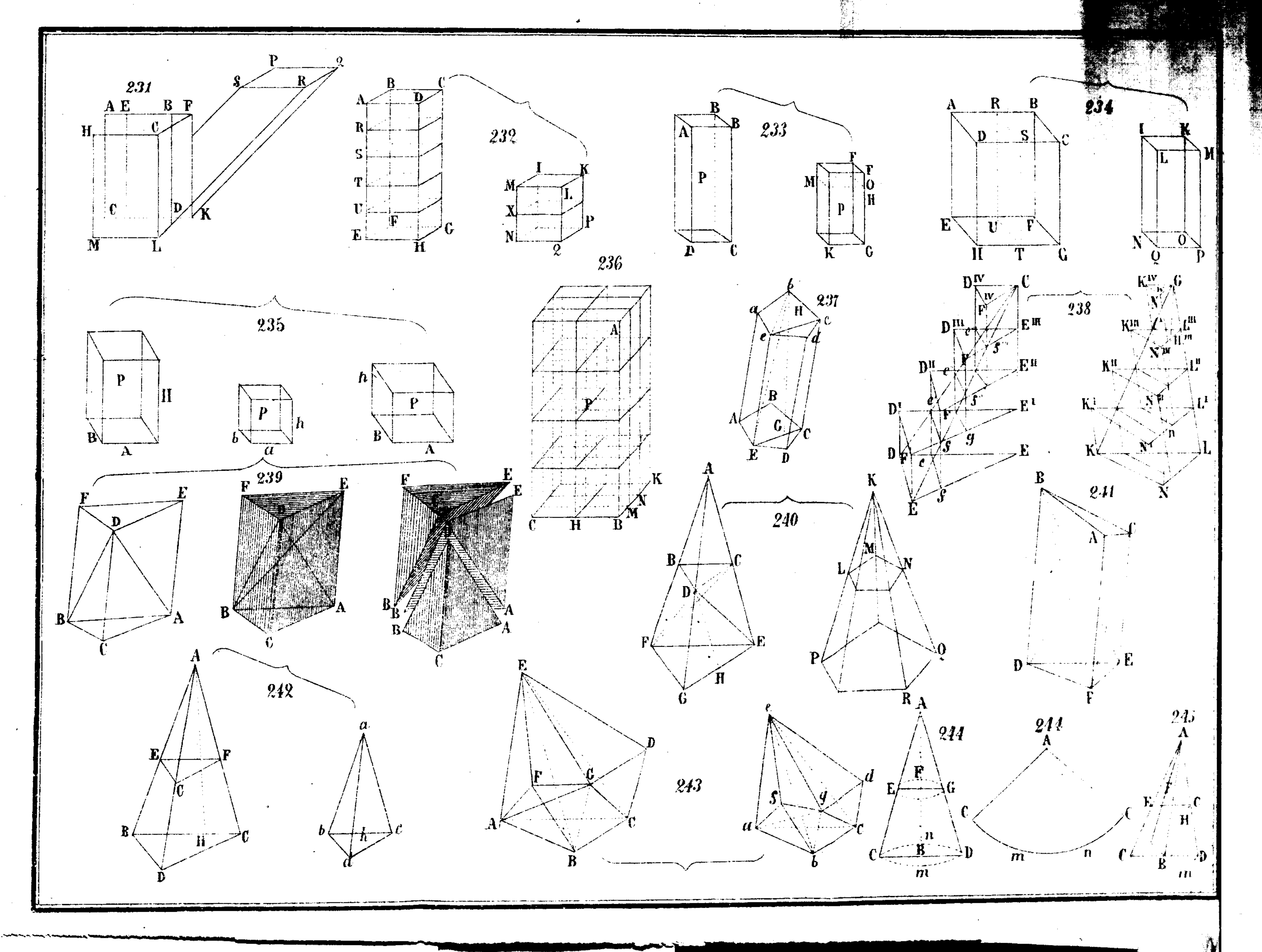

42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
80
81

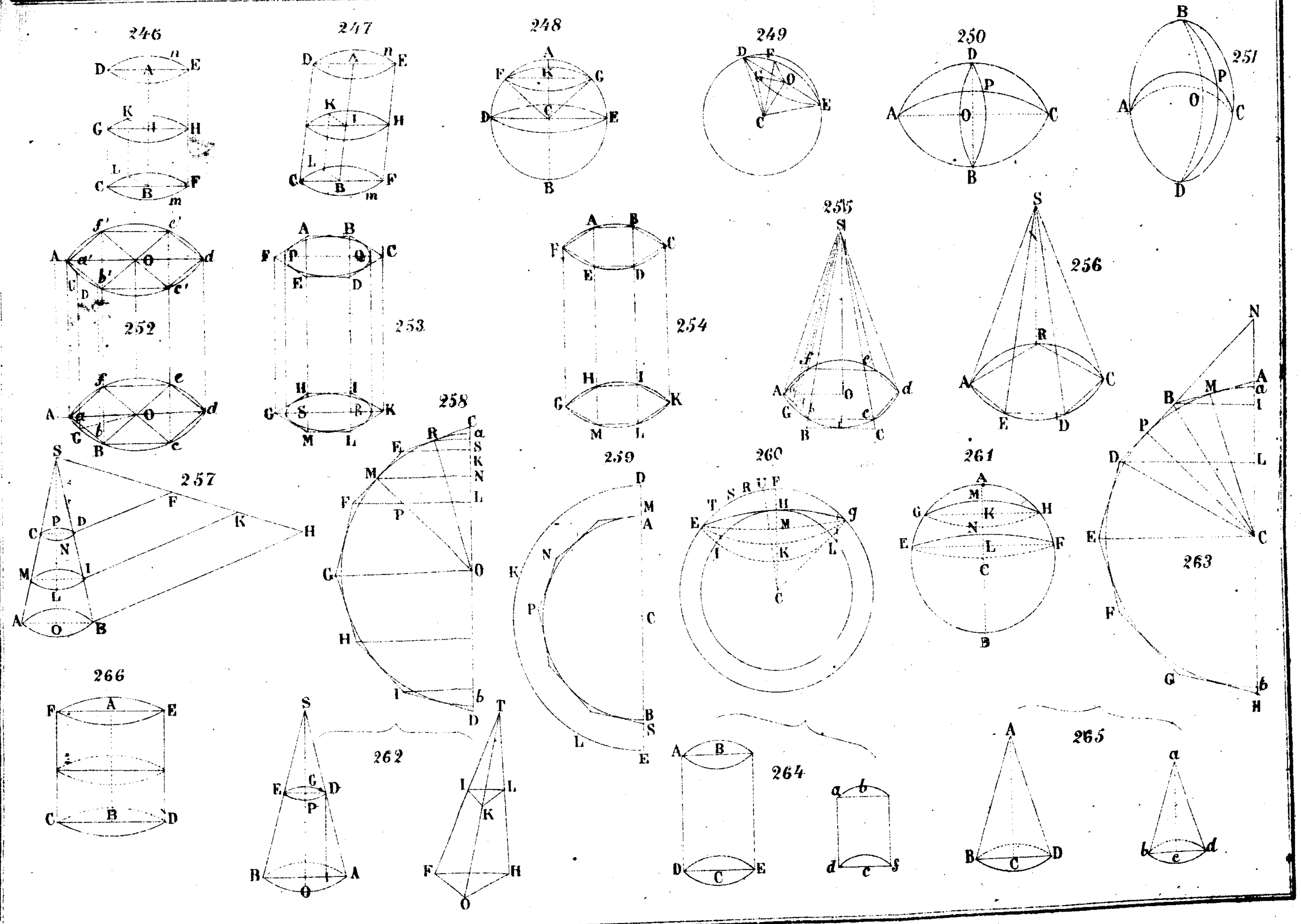

114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
139
140
141
142
143



174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204


205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230




246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266